

THESE
présentée à
L'UNIVERSITE DE PROVENCE
AIX-MARSEILLE 1

POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR D'UNIVERSITE

par

J-P FRAGASSI

« Contribution à l'étude de l'émission acoustique
à fréquence discrète dans les jets gazeux structurés »

soutenue le 20 septembre 1974

JURY	{	MR J. VALENSI	}	PRESIDENT
		MR R. BOUDET		EXAMINATEURS
		M ^{LE} M. MERLE		

THESE

présentée à
L'UNIVERSITE DE PROVENCE
AIX-MARSEILLE 1

POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR D'UNIVERSITE

par

J-P FRAGASSI

«Contribution à l'étude de l'émission acoustique
à fréquence discrète dans les jets gazeux structurés»

soutenue le 20 septembre 1974

JURY	{	M ^R J. VALENSI	PRESIDENT
		M ^R R. BOUDET	EXAMINATEURS
		M ^{LLE} M. MERLE	

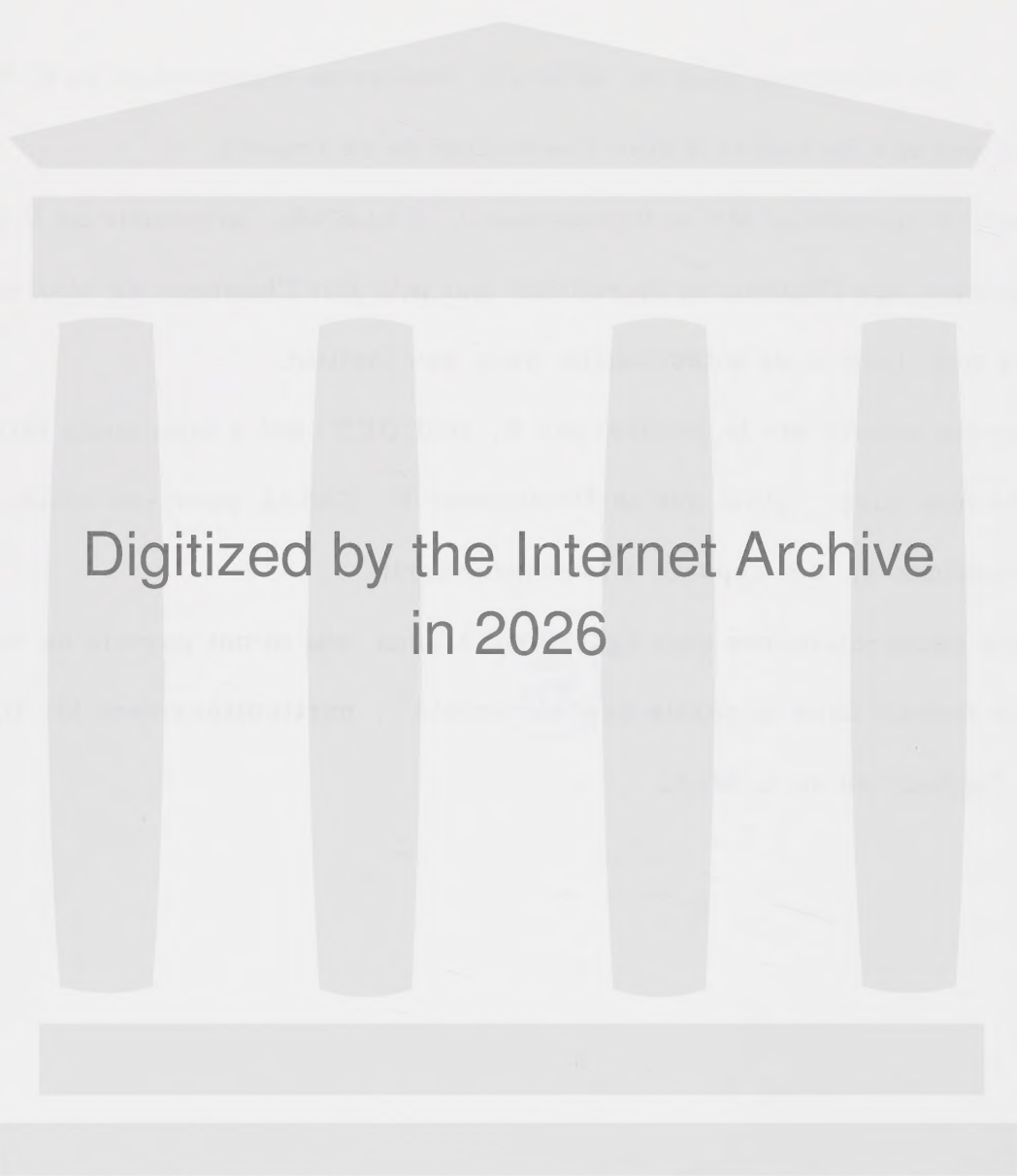


Je remercie Mlle M. MERLE, Maître de Recherches au C.N.R.S. ,
qui m'as permis de mener à bien l'exécution de ce travail.

Je remercie également Mr le Professeur J. VALENSI, Directeur de l' Institut
de Mécanique des Fluides de Marseille qui m'a fait l'honneur de bien vouloir
présider mon jury et de m'accueillir dans son Institut.

Je remercie encore Mr le Professeur R. BOUDET qui a bien voulu faire
partie de mon jury , ainsi que le Professeur P. CASAL pour ses critiques et
les corrections qu'il a apporté à mon manuscrit.

Tous mes remerciements vont également à ceux qui m'ont permis de mener
à bien ce travail dans la partie expérimentale , particulièrement Mr B. CAR-
BONE, Technicien au L. M. A.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549012_0004

UNIVERSITE DE PROVENCE

(AIX-MARSEILLE I)

PERSONNEL ENSEIGNANT

(U.E.R. Scientifiques)

Professeurs titulaires

MM. BIZOUARD Michel	Physique
BLANCHARD André	Mathématiques générales
Mme BLANCHARD Christiane	Mathématiques
MM. BODIOU Georges	Mathématiques appliquées
BODOT Aubert	Chimie
BONNEAU Marcel	Mathématiques
CADILPAC Michel	Physique
CARPENI Georges	Chimie
CASAL Pierre	Mécanique rationnelle et appliquée
Mlle CLARION Claire	Mécanique des Fluides
MM. DESNUELLE Pierre	Chimie biologique
DOUCET Yves	Physique
FAVRE Alexandre	Mécanique de l'atmosphère et météorologie
FEHRENBACH Charles	Astronomie
FOURES Léonce	Mathématiques
FRAISSE Roland	Mathématiques
Mme FURNESTIN Marie-Louise	Biologie animale
MM. GIRARDIE Adrien	Zoologie
GOUVERNET Claude	Géologie appliquée
HERVE Jacques	Electronique
HUGON Maurice	Psycho-physiologie
JULG André	Chimie théorique
LAFFITTE Marc	Chimie
MALE Damien	Physique
MANDELBROJT Jacques	Physique
MARCHIS-MOUREN Guy	Chimie biologique
MERICOUX Roger	Physique industrielle
NAUDET Maurice	Chimie des corps gras
NEGRE Robert	Biologie végétale
SIMON Claude	Physiologie animale
SOURIAU Jean-Marie	Méthodes mathématiques de la physique
Mme TAXY Suzanne	Géologie historique
MM. VALENSI Jacques	Mécanique expérimentale des fluides
VISCONTI Antoine	Physique théorique

Professeurs sans chaire

MM. BOREL Fernand	Techniques mathématiques de la physique
BOUDET Roger	Mathématiques
Mlle CATZIGRAS France	Géologie historique
Mlle CHANDEBOIS Rosine	Biologie animale
M. COMBET Serge	Chimie
Mme DELACHE Solange	Mathématiques
MM. FEUGEAS Claude	Chimie
FOUGEREAU Michel	Biochimie
GILLET André	Mathématiques
GUENOCHÉ Henri	Mathématiques appliquées
GUERMEUR Robert	Physique
HALBWACHS Francis	Physique
HENNEQUIN Jacques	Electronique
MANUCEAU Jérôme	Mathématiques
MERDY Henri	Physique
Mlle PICHENOT Mathilde	Biologie végétale
M. SARDA Louis	Biochimie
Mme SIRUGUE Madeleine	Physique
M. TACHOIRE Henri	Chimie

Maîtres de conférences

MM. BELAICH Jean-Pierre	Microbiologie
BENARROCHE Marcel	Physique
BENLIAN David	Chimie de coordination
CASALOT André	Chimie
CRESP Jean	Biologie animale
DELAAGE Michel	Biochimie
Mlle DETRAZ Jacqueline	Mathématiques
MM. FARDOUX Gérard	Mathématiques
LAVAGNE André	Biologie végétale
MARTINET Bernard	Mathématiques
MOULINS Maurice	Biologie végétale
PUJOL Louis	Chimie
PUJOL Rémy	Psycho-physiologie
SOUBLIN Jean-Pierre	Mathématiques
STREIFF Roland	Chimie

Chargés d'enseignement

M. DELEUIL Roger	Physique
------------------	----------

- SOMMAIRE -

<u>1. INTRODUCTION</u>	1-1
<u>2. GENERALITES</u>	2-1
<u>2.1. Structure des jets</u>	2-1
2.1.1. Jets subsoniques	2-1
2.1.2. Jets supersoniques	2-1
a) Jets parfaitement détendus	2-1
b) Jets avec structure de choc	2-4
c) Jets soniques à structure de choc	2-5
d) Détermination semi-empirique de la périodicité des jets	2-6
e) Structure de choc réelle	2-9
<u>2.2. Bruit des jets</u>	2-10
2.2.1. Bruit de turbulence	2-10
a) Jet subsonique	2-10
b) Jet à grande vitesse	2-13
2.2.2. Bruit de cisaillement	2-14
2.2.3. Emission acoustique à fréquence discrète	2-15
<u>3. POSITION DU PROBLEME DE L'EMISSION ACOUSTIQUE A FREQUENCE DISCRETE</u>	3-1
<u>3.2. Propagation d'une perturbation initiale</u>	3-2
<u>3.2.A. Champ irrotationnel compressible</u>	3-3
1 Généralités	3-3
2 Position du problème	3-4
3 Formulation du problème	3-8
4 Résolution du problème	3-11
5 Conclusion	3-14
<u>3.2.B. Formation tourbillonnaire dans une couche limite libre</u>	3-15
1 Généralités	3-15
2 Instabilité spatiale	3-16
3 Position du problème	3-16

3.3.	<u>Intéraction perturbations - onde de choc</u>	3-19
1	Position du problème	3-22
2	Décomposition en ondes élémentaires sinusoïdales planes	3-23
3	Problème permanent équivalent	3-26
4	Equation différentielle générale de l'écoulement perturbé	3-28
5	Relations du choc oblique	3-29
6	Calcul du 2me membre de l'équation différentielle	3-32
7	Résolution de l'équation différentielle	3-33
8	Recomposition du champ derrière le choc	3-40

4. ETUDE DETAILLEE

4.1.	<u>Action d'un champ acoustique sur l'écoulement du jet</u>	4-1
4.1.1.	Détente autour d'un angle	4-1
4.1.2.	Vitesse après la détente	4-4
4.2.	<u>Propagation d'une perturbation initiale de pression</u>	4-6
4.2.1.	Méthode de transformation	4-6
4.2.2.	Problème transformé	4-10
1	Equation d'onde	4-10
2	Conditions à la couche mince	4-12
3	Solution du problème transformé	4-12
4	Solution du problème	4-14
4.3.	<u>Intéraction perturbations-onde de choc</u>	4-17
4.3.1.	Equations du champ de faibles perturbations dans un écoulement uniforme permanent	
4.3.2.	Perturbation d'entropie	4-21
4.3.3.	Champ d'un tourbillon isolé	4-22
4.3.4.	Décomposition d'un tourbillon isolé en ondes élémentaires sinusoïdales planes	4-26
4.3.5.	Analyse sommaire de l'interaction entre une onde de choc et une perturbation plane	4-31
4.3.6.	Equation différentielle générale de l'écoulement perturbé	4-33
4.3.7.	Relations du choc	4-35
1	Ecoulement principal	4-36
2	Ecoulement perturbé	4-39
3	Grandeurs derrière le choc	4-41
4	Calcul des coefficients A et B	4-42
4.3.8.	Cas d'une onde de cisaillement	4-52

5. CONCLUSION

1. INTRODUCTION

L'utilisation de plus en plus fréquente d'engins propulsés par échappement d'un jet gazeux, dont la grosseur et la vitesse vont en augmentant, ainsi que, depuis peu, l'apparition des lanceurs géants de fusées, ont tout naturellement conduit l'attention des chercheurs et des ingénieurs à se porter sur les problèmes soulevés par le bruit : la gêne auditive et les possibilités de traumatisme humain, la fatigue ou la détérioration du matériel proche des sources de bruit.

La recherche de solutions pratiques satisfaisantes se heurte à des difficultés énormes, inhérentes à la complexité du phénomène de génération du bruit du jet.

Pendant les vingt cinq dernières années, de nombreuses recherches théoriques et expérimentales ont eu pour but la découverte des mécanismes de base de la génération du bruit des jets, dans l'intention d'agir pour le diminuer. La direction fondamentale de ces recherches a été donnée par M.J. Lighthill [56] dans son ouvrage "Théorie du son engendré aérodynamiquement" par des éléments turbulents subsoniques. A partir de considérations dimensionnelles, il a pu établir que la puissance acoustique rayonnée par l'écoulement turbulent d'un jet est proportionnelle, entre autre, à la 8ième puissance de la vitesse d'échappement du jet à la sortie.

Des contributions importantes dans la connaissance des phénomènes générateurs du bruit dans les jets ont été fournies par H.J. Ribner [107] et J.Ffowcs-Williams [24]. Du point de vue expérimental, d'autre part, Franklin R.E. [28] a montré que sur des jets parfaitement détendus, donc libres de choc, l'émission est réduite, ce qui suggère une contribution importante de l'interaction entre turbulence et onde de choc.

Actuellement, on est seulement en mesure de préciser que les sources principales d'émissions acoustiques dans l'écoulement turbulent d'un jet sont dues à :

- a) la nature turbulente du jet,
- b) l'interaction turbulence onde de choc,
- c) l'instabilité du jet engendrant des ondes dites de cisaillement,
- d) les effets de résonance dus à un phénomène d'autoentretien.

La complexité physique du mécanisme responsable du bruit dans de tels écoulements, où toutes les sources peuvent être présentes simultanément, et même agir entre elles de manière non linéaire, est inextricable, et actuellement encore, une prévision quantitative du bruit n'est pas possible.

Seules des analyses fragmentaires de certains cas idéalisés ont pu être faites jusqu'à présent ; par exemple :

- l'interaction des ondes de choc avec les perturbations circulant dans l'écoulement principal engendrant des émissions acoustiques par H.J. Ribner [102], F.K. Moore [80], M.J. Lighthill [57], M.A. Hollingsworth, E.J. Richards [36] ;

D.S. Dosanjh, T.M. Weeks [18] etc ...

- la stabilité d'une couche mince tourbillonnaire par C.K.W. Tam [115] qui a montré que la formation d'ondes acoustiques directionnelles, se propageant dans une région limitée de l'espace, est une des conséquences directes de l'instabilité de la couche de cisaillement à la frontière libre du jet.

Le problème que nous tentons d'étudier plus particulièrement est celui traitant des émissions acoustiques à fréquence discrète de grande intensité, engendrées par les jets supercritiques à structure périodique. Ce phénomène est bien connu sous le nom de "jet screech" ou "hurlement du jet".

La formation de ces émissions est gouvernée par un mécanisme d'autoentretien. Ainsi, l'écoulement d'un jet peut être considéré comme un amplificateur de haut gain à large bande : le rôle d'amplificateur se traduit par le grossissement exponentiel avec la distance aval, de petites perturbations créées en amont. C'est la boucle du cycle d'auto entretien qui transforme le système en oscillateur à bande étroite, et qui détermine la valeur de la fréquence discrète.

Ce mécanisme a été décrit pour la première fois par A. Powell [95], en 1953 de la manière suivante :

- une perturbation créée dans la couche de cisaillement d'un jet, près de l'orifice de sortie de la tuyère, est transportée vers l'aval par l'écoulement ; elle atteint l'extrémité d'une cellule, déterminée par une onde de choc, et engendre un son intense, par interaction entre l'onde de choc et la perturbation amplifiée. L'étude systématique du processus d'autoentretien n'a jamais été entreprise jusqu'à maintenant ; A. Powell a bien décrit le mécanisme, mais sans en analyser effectivement les différents éléments essentiels.

Depuis le début, le but de notre étude a été de tenter de découvrir des méthodes d'analyse susceptibles de faire progresser le problème dans chacun des éléments du mécanisme.

Le premier problème que nous devons aborder est celui de la création de petites perturbations initiales par interaction à l'orifice de sortie de la tuyère, entre la couche limite libre et l'émission acoustique résultante à fréquence discrète, se propageant vers l'amont dans le milieu extérieur.

Ce problème n'a pas encore été résolu théoriquement, et F.J. Ffowcs-Williams a entrepris l'étude de ce sujet en collaboration avec P.J. Poldervaart (Université d'Eindhoven) pour la partie expérimentale (visuàlisation du phénomène).

Nous proposons nous-même une analyse simple de ce problème, basée sur les variations des conditions de détente du jet, conduisant à la formation d'une perturbation de vitesse (Chapitre 3-1).

Le problème suivant est celui de la propagation des perturbations initiales créées à l'orifice de sortie, en particulier la vitesse de propagation et le gain en amplitude de ces perturbations.

L'étude théorique de la stabilité d'un jet parfaitement détendu a été menée à bien par C.K.W. Tam [115] qui suppose un milieu extérieur originellement libre de toute perturbation, les perturbations excitatrices provenant de l'intérieur de la tuyère.

Nous avons tenté d'adapter ce problème au cas où la perturbation excitatrice de pression, provenant du milieu extérieur, était constituée par l'émission acoustique à fréquence discrète. Comme dans le problème traité par C.K.W. Tam, nous nous sommes limités au cas de la couche mince tourbillonnaire (Chapitre 3.2)

Si la couche limite libre du jet n'est plus considérée comme une couche mince tourbillonnaire, nous observons la propagation d'une perturbation de vitesse rotationnelle, et nous sommes amenés à étudier, d'après les travaux de A. Michalke [73] et autres, la formation tourbillonnaire apparaissant dans la couche de cisaillement et le grossissement de cette perturbation due à l'instabilité du jet. (Chapitre 3-2)

Le problème important qui intervient maintenant est celui de la génération d'ondes acoustiques par interaction entre ondes de choc et perturbations circulant vers l'aval. En nous référant en particulier aux travaux antérieurs de J.H. Ribner [102] et F.K. Moore [80], nous avons étudié en utilisant notre propre méthode de calcul, l'interaction entre une perturbation quelconque et une onde de choc. Pour juger de la validité de la méthode, nous avons étudié expérimentalement, dans notre tube à choc, l'interaction d'une onde de choc avec un tourbillon. Les résultats numériques obtenus par la théorie, comparés aux résultats expérimentaux, donneront une idée de la validité de la méthode d'analyse.

Le but de cette étude est d'utiliser cette méthode pour analyser l'interaction entre les ondes de choc des cellules du jet avec toutes les perturbations entraînées en aval du jet (Chapitre 3-3)

Le dernier problème restant à traiter est celui de la recombinaison du champ acoustique proche du jet. On émet l'hypothèse qu'il est créé par la combinaison différentes émissions acoustiques issues des différentes sources sonores, de forces et de phases différentes, en mouvement dans le jet.

La longueur des cellules, la vitesse de propagation des perturbations dans le jet et la vitesse du son dans le milieu extérieur, ainsi que les différents coefficients de grossissement et d'atténuation, doivent permettre de déterminer la fréquence propre et l'intensité de cette émission, par le processus d'autoentretien.

2. GENERALITES

2.1 Structure des jets

2.1.1. Jets subsoniques

Un jet subsonique, c'est-à-dire pour lequel le nombre de Mach de l'écoulement à l'orifice de sortie de la tuyère est inférieur à l'unité, est caractérisé par deux régions de base différentes : la première s'étend vers l'aval sur une distance approximativement égale à quatre fois le diamètre (ou la largeur de la fente) de sortie. Cette zone comprend un coeur potentiel entouré par une région d'écoulement fortement turbulent, appelée "zone de mélange initiale". Lorsque l'écoulement en amont est libre de toute perturbation, l'écoulement après la sortie est laminaire. Mais, en s'échappant dans l'air au repos, l'écoulement est soumis sur ses frontières à une intense action de cisaillement et, à une distance très proche de l'orifice de sortie, l'écoulement dans la zone de cisaillement est déjà fortement turbulent. Comme il y a un échange continu de quantité de mouvement entre l'écoulement potentiel et l'air ambiant, la zone de mélange grossit en aval au détriment de la zone laminaire qu'elle entoure, jusqu'à la supprimer entièrement ; à partir de ce point, l'écoulement devient complètement turbulent.

La frontière de la zone laminaire est approximativement conique, d'où son nom de "coeur" ou "cone" laminaire.

Une région intermédiaire s'étend jusqu'à une distance double de celle du coeur.

C'est à partir de ce point que se situe la seconde zone d'écoulement de base, dite "zone de mélange totalement développée".

Ces mesures expérimentales montrent que, dans la zone de mélange initiale, les profils de vitesse sont semblables entre eux ; cette condition est encore valable pour la zone de mélange totalement développée.

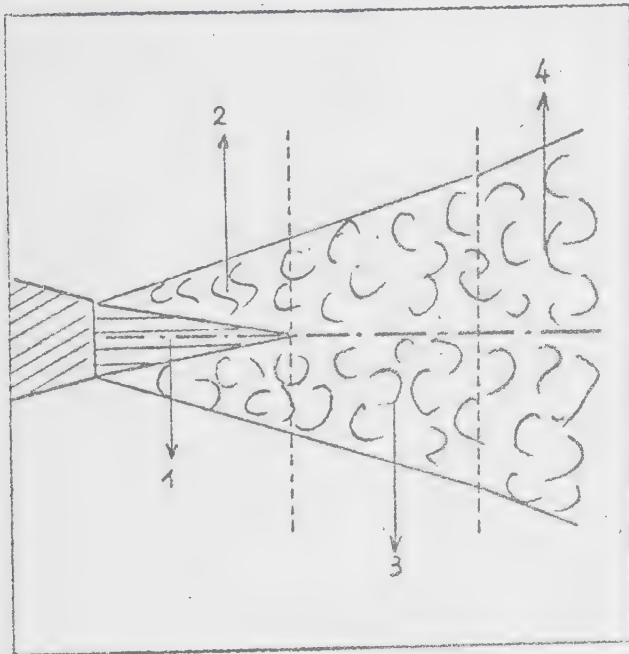
Dans la zone de transition, l'écoulement passe par une période d'ajustement. (Voir Fig.3-1)

2.1.2. Jets supersoniques

a) Jets parfaitement détendus

Les jets supersoniques conservent les caractéristiques générales des écoulements subsoniques, excepté que, dans pratiquement tous les cas, on observe la présence d'ondes de choc. Si le jet est parfaitement détendu, c'est-à-dire si la pression à la sortie est égale à la pression ambiante, l'écoulement est entièrement libre de choc.

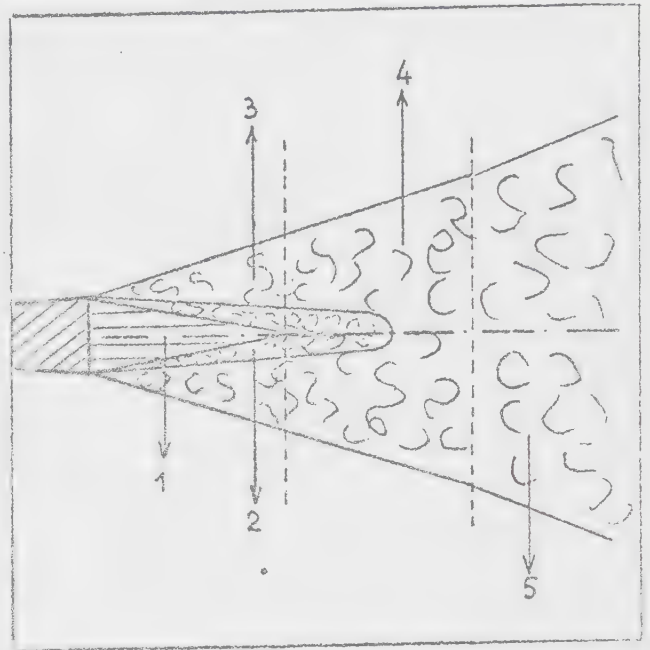
Cet écoulement présente une grande similitude avec l'écoulement subsonique ; cependant, on peut y définir une nouvelle zone, le coeur supersonique. La vitesse dans le coeur laminaire est constante et égale à la vitesse à la sortie qui est supersonique. Si on se déplace dans la zone de mélange initiale, à partir du coeur laminaire, vers l'extérieur, on atteint un point où la vitesse devient subsonique. On détermine ainsi une frontière sonique, qui est approximativement conique, et qui forme une zone dite "coeur supersonique". La structure de l'écoulement supersonique libre de choc est représentée figure 2-2 on peut y observer les cinq zones de base.



Jet subsonique

- 1 Cone laminaire
- 2 Zone de mélange initiale turbulente
- 3 Zone de transition
- 4 Zone de mélange totalement développée

Figure 2-1



Jet supersonique parfaitement détendu.

- 1 Cone laminaire supersonique
- 2 Coeur turbulent supersonique
- 3 Zone de mélange initiale turbulente subsonique.
- 4 Zone de transition turbulente subsonique
- 5 Zone de mélange complètement développée turbulente subsonique.

Figure 2-2

Il n'existe toujours pas de solution théorique complète, même dans la forme la plus simple, celle de l'écoulement incompressible ; à plus forte raison, le problème encore plus complexe du jet supersonique turbulent ne sera pas résolu dans l'immédiat.

Cependant, de nombreux travaux expérimentaux édifient une base solide, et la combinaison de la théorie et de l'expérience a permis d'établir des méthodes semi-empiriques assez sûres.

On constate que la différence aérodynamique la plus significative, entre le jet subsonique et le jet supersonique, se situe dans la longueur du cône du jet. Pour des vitesses subsoniques, la longueur du cône est approximativement égale à quatre fois le diamètre de sortie, comme l'a montré J.H. Lighthill, ainsi que les différents expérimentateurs E.S. Love [62], W.R. Warren [120], E.T. Pitkins [90], R.C. Potter [92].

En se basant sur les résultats obtenus pour la longueur du cône relative au diamètre de sortie de la tuyère, une relation semi-empirique en fonction du nombre de Mach du jet a pu être établie :

$$L_c = \frac{l_c}{d} = 5,22 M_j^{0,9} + 0,22 \quad (2-1)$$

$$L_s = \frac{l_s}{d} = 5 M_j^2 + 0,80 \quad (2-2)$$

l_c longueur du cône subsonique

l_s longueur du cône supersonique

d diamètre de sortie du jet

Jusqu'à $M \sim 0,8$ la longueur du cône est identique à la longueur de mélange trouvée par Lighthill égale à $4 D$ (Figure 2-3).

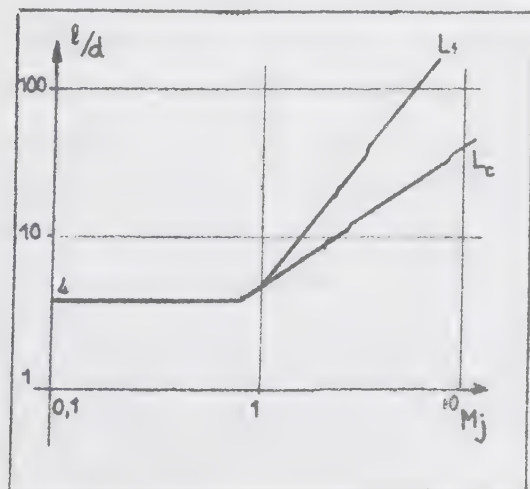


Fig. 2-3-

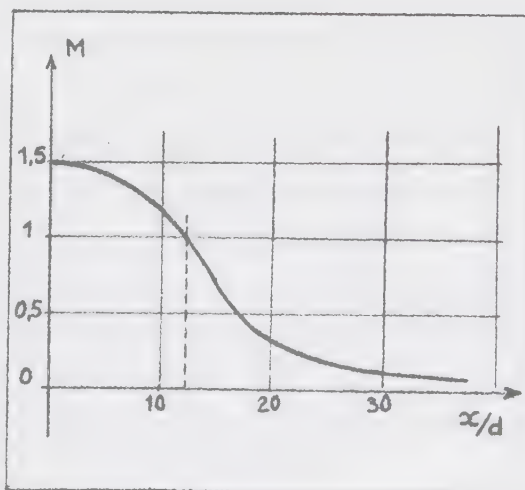


Fig. 2-4

On peut ainsi représenter le nombre de Mach de l'écoulement le long de l'axe du jet. On remarque qu'en aval du point où l'écoulement devient supersonique, la vitesse du jet décroît rapidement avec la distance. Sur la Figure 4 on donne un exemple pour un jet dont le nombre de Mach à la sortie est 1,5 et pour lequel $L_s = 11$.

Pour un jet sonique, la zone de transition se termine approximativement à 8 diamètres en aval de la sortie du jet, mais, pour un jet supersonique, la zone entièrement développée, avec profil des vitesses semblables, n'apparaît que plus loin en aval.

Les mesures expérimentales montrent que, sur l'axe, la vitesse décroît comme x^{-1} pour les jets subsoniques. Cette loi reste valable pour les jets supersoniques mais le régime complètement développé n'est pas encore établi lorsque le fluide devient subsonique (Figure 2-5) et la loi en x^{-1} ne s'établit que plus loin en aval.

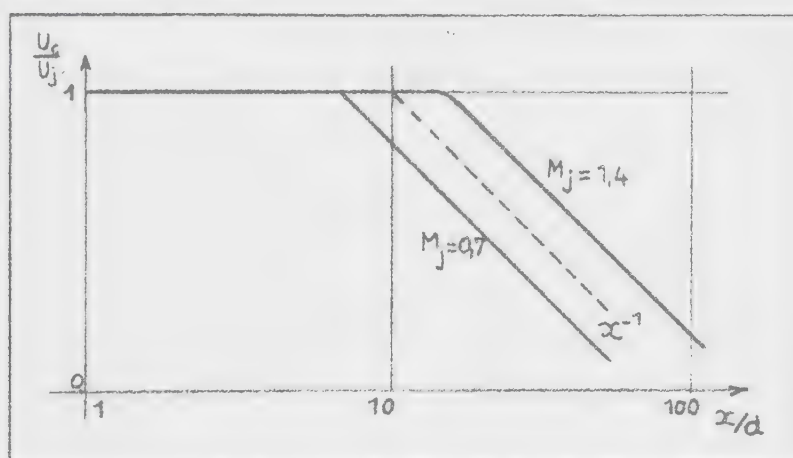


Fig. 2-5

b) Jets avec structure de choc

Un jet parfaitement détendu est difficile à obtenir en pratique, et il est quasiment impossible d'obtenir un écoulement libre de choc. Pratiquement, tous les écoulements des jets supersoniques sont caractérisés par la présence d'ondes de choc fixes dans le coeur laminaire. En fait, l'écoulement libre de choc ne pourrait se rencontrer, pour une tuyère parfaitement profilée, que pour un rapport optimum des pressions génératrices, c'est-à-dire, lorsqu'il s'agit de fusées ou de rockets, pour une certaine altitude seulement. Or, les problèmes acoustiques les plus importants surviennent lorsque l'engin est sur sa rampe de lancement, ou pendant les premières parties du vol ; la tuyère opère alors dans des conditions surdétendues. Lorsque la pression ambiante diminue, le régime passe des conditions surdétendues aux conditions sousdétendues en passant par le rapport optimum de pression.

Sur la figure 2-6 les différents états d'un jet idéalisé (C'est-à-dire sans zone de mélange amenuisant le coeur laminaire) sont représentés.

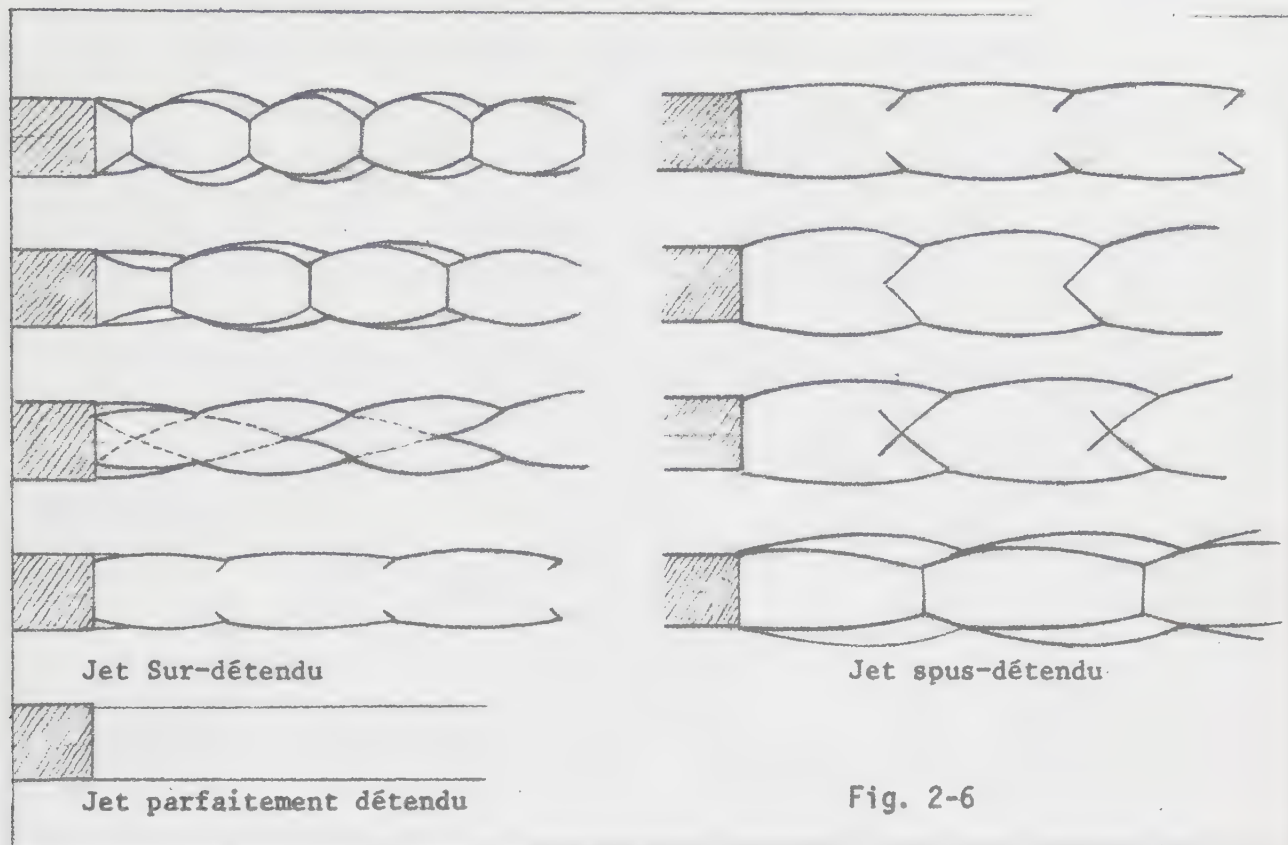


Fig. 2-6

On observe que les compressions et les détentes successives dans l'écoulement réengendrent en certains points les conditions de sortie, de telle sorte que le cycle soit répété indéfiniment ; c'est ainsi qu'apparaît dans le coeur laminaire la structure périodique de choc.[35]

On peut remarquer que dans le cas surdétendu, le premier chaînon est plus court que les suivants, et que dans le cas sous-détendu tous les chaînons ont pratiquement la même longueur ; la longueur des chaînons croît avec le rapport des pressions génératrices.

c) Jets soniques à structure de choc

D'un point de vue expérimental, nous nous sommes particulièrement attachés à l'étude systématique de l'écoulement d'un jet sonique, c'est-à-dire issu d'une tuyère simplement convergente, pour un rapport des pressions génératrices toujours supérieur au rapport critique $R_c = 1,896$ (Dans ce cas le jet est toujours sous-détendu, et la structure de choc est toujours visible). La détermination expérimentale de la longueur des chaînons présente un grand intérêt car ils ont une grande importance dans la détermination de la fréquence discrète.

Nous avons étudié le cas des jets bidimensionnels (orifice de sortie en forme de fente) et de révolution (orifice de sortie circulaire) et nous avons pu constater que :

1. Tous les chaînons ont pratiquement la même longueur,
2. Dans le cas des jets bidimensionnels, la croissance des chaînons en fonction du rapport croissant des pressions se fait d'une manière continue,
3. Dans le cas des jets de révolution, on observe des discontinuités correspondant aux brusques changements de structure de choc.

d) Détermination semi-empirique de la périodicité dans les jets.

- Travaux de Emden [21] [84]

Emden a proposé pour la mesure de la longueur d'onde des chaînons la formule empirique

$$\frac{L}{d} = 0,88 \sqrt{\frac{P_o - P_c}{P_a}} \quad (2-3)$$

L = longueur des chaînons

d = diamètre de sortie de l'ajutage

$P_c = 1,896 p_a$

en tentant de la justifier par une méthode acoustique. Mais sa méthode fait appel à l'hypothèse que le jet, après être passé par la pression critique P_c , s'écoule partout à la vitesse d'écoulement critique $v = a$, et que la pression atmosphérique P_a règne partout ; ceci suppose une brusque chute de pression de P_c à P_a , c'est-à-dire une onde normale de dépression brusque.

- Méthode de Prandtl [99] [84]

Dès 1904, Prandtl introduit une méthode approchée qu'il utilise pour l'évaluation de la périodicité d'un jet de révolution :

Considérons un jet de révolution d'axe Ox_1 . Soit F le potentiel des vitesses dans le jet et u_i la vitesse

$$u_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (2-4)$$

Admettons que les différences entre la vitesse V et une vitesse moyenne U parallèles à Ox_1 soient faibles :

On, pourra poser $u_i = U_i + u'_i$ avec $u'_i \ll U_i$

(2-5)

avec $U_2 = U_3 = 0$

En tenant compte de la symétrie de révolution et de la périodicité, on est conduit à poser :

$$F = Ux_1 + A \sin bx_1 f(r) \quad (2-6)$$

$$\begin{cases} u = U + A b \cos bx f(r) & \text{vitesse le long de } Ox_1 \\ v = A \sin bx f'(r) & \text{vitesse radiale.} \end{cases} \quad (2-7)$$

En prenant les équations d'Euler et de continuité en mouvement permanent, on obtient les formules suivantes, s'établissant à partir de: $F = M^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \left[1 - \left(\frac{U}{a}\right)^2\right] \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \left[1 - \left(\frac{U}{a}\right)^2\right] \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 0 \quad (2-8)$$

a = célérité moyenne du son correspondant à U

$$A \left\{ f'' + \frac{f'}{r} + \left[\left(\frac{U}{a}\right)^2 - 1 \right] b^2 f \right\} \sin bx_1 = 0$$

$$f'' + \frac{f'}{r} + (M^2 - 1) b^2 f = 0 \quad (2-9)$$

dont la solution est

$$f(r) = C_1 J_0(qr) + C_2 Y_0(qr) \quad \text{avec} \quad q = b(M^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{pour} \quad r \rightarrow 0 \quad Y_0 \rightarrow \infty \text{ d'où} \quad C_2 = 0$$

$$f_1(r) = J_0(qr) \quad \text{fonction de Bessel de 1ere espèce d'ordre 0}$$

Prandtl assimile alors le jet à un cylindre de révolution de diamètre moyen $D = 2 R$ et il écrit que la pression est constante et la vitesse égale à U sur cette surface. Donc :

$$J_0(qr) = 0$$

Cette équation a une infinité de racines dont la plus petite vaut
 $q R = 2,405$

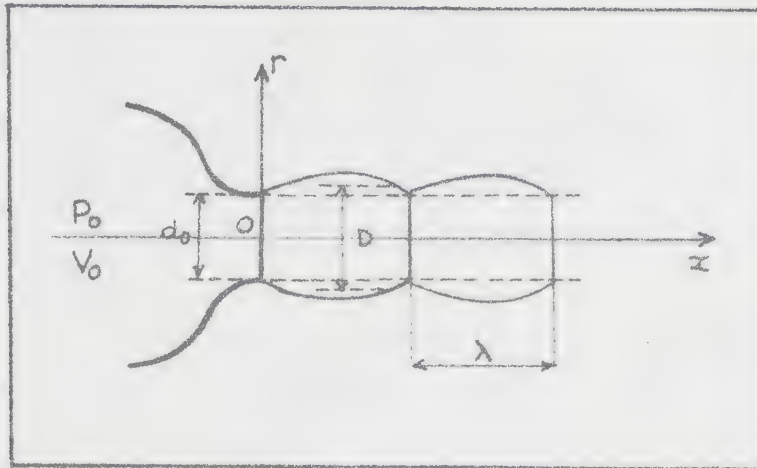


Fig.2-7

Soit r_i une racine de $J_0(R) = 0$
 On aura $qR = r_i$ avec $q = b(M^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ et $b = \frac{2\pi}{L}$
 d'où $L_i = \frac{2R(M^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{r_i} = \frac{D(M^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{r_i}$ (2-10)

La plus petite racine $r_i = 2,405$ fixe alors la plus grande longueur d'onde :

$$\frac{L}{D} = \frac{\pi}{2,405} (M^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = 1,307 (M^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (2-11)$$

D le diamètre moyen est une fonction de d diamètre de sortie, que l'on peut calculer à partir de l'équation de continuité :

$$\rho_a D^2 U = \rho_c d^2 V_c \quad (2-12)$$

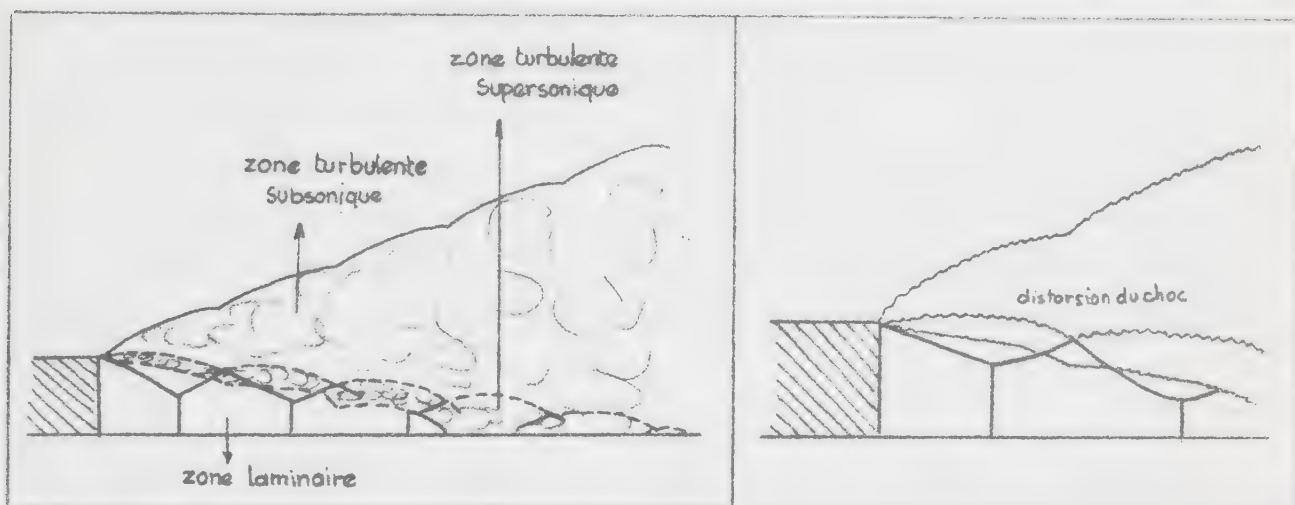
$$\text{d'où} \quad \left(\frac{D}{d}\right)^2 = \frac{1}{M} \frac{2}{\gamma - 1} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (2-13)$$

Cette relation permet de déterminer le diamètre moyen de Prandtl à partir d'un nombre de Mach donné et donne la longueur des chaînons dans le jet.

e) Structure de choc réelle

Le schéma proposé aux paragraphes précédents correspond à un jet idéalisé ne se mélangeant pas à l'atmosphère ambiante et conservant sa quantité de mouvement. En pratique, ce n'est pas exact car l'écoulement et le milieu ambiant agissent entre eux pour former une zone de mélange turbulent, qui absorbe progressivement le coeur laminaire ; d'autre part, la structure de choc extrait de l'énergie, ce qui conduit à une certaine réduction de la vitesse moyenne axiale.

L'écoulement peut donc être représenté de façon plus réaliste de la manière suivante (Figure 2-8).



(a)

Fig. 2-8

(b)

En comparant avec l'écoulement libre de choc de la figure 2, on peut voir que la principale différence, en dehors de la présence des chocs eux-mêmes, provient de la déformation des frontières des différentes zones d'écoulement : la zone d'écoulement supersonique ne s'étend plus à l'infini ; le choc se déforme lorsque la vitesse moyenne de l'écoulement diminue, et la structure de choc disparaît lorsque l'écoulement devient subsonique.

2.2. Bruit des jets

2.2.1. Bruit de turbulence

Les équations linéarisées du mouvement en Mécanique des Fluides, montrent que, dans un milieu conducteur compressible visqueux, trois modes de perturbation de base peuvent exister : le mode tourbillonnaire, le mode sonore, le mode entropique, chacun étant un type familier de perturbation.

Lorsque ces perturbations cessent d'être petites par rapport aux grandeurs principales de l'écoulement, de nouvelles perturbations apparaissent, produites par l'interaction des modes de base. L'interaction la plus efficace pour produire du son est celle du mode tourbillonnaire avec lui-même.

Le problème du son engendré aérodynamiquement par interaction des modes tourbillonnaires a été abordé pour la première fois en 1952 par M.J. Lighthill [56-58] qui a montré que tout écoulement turbulent peut être considéré comme équivalent acoustiquement à une distribution de quadripôles ; il analyse le champ acoustique d'après ce concept.

a) Jet subsonique - Rappels de la théorie de Lighthill

Considérons un espace contenant un gaz réel en mouvement turbulent ; soit dans cet espace un point X. Ecrivons les équations de la dynamique pour un volume dX contenant X :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \\ \rho \frac{D u_i}{D t} + \frac{\partial}{\partial x_j} p_{ij} = 0 \end{array} \right. \quad (2-14)$$

p_{ij} somme des forces extérieures.

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p_{ij}) = 0 \quad (2-15)$$

La théorie de Lighthill consiste à séparer en deux parties la somme (quantité de mouvement + forces extérieures)

- La première partie est l'approximation faite dans les gaz parfaits animés de petits mouvements (cas d'un gaz au repos dans un champ acoustique) :

- La deuxième partie est le complément de la première :

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + p_{ij} - a_0^2 \rho \delta_{ij}$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} + a_0^2 \rho \delta_{ij}) = 0 \quad (2-16)$$

on obtient ainsi l'équation de propagation de : ρ

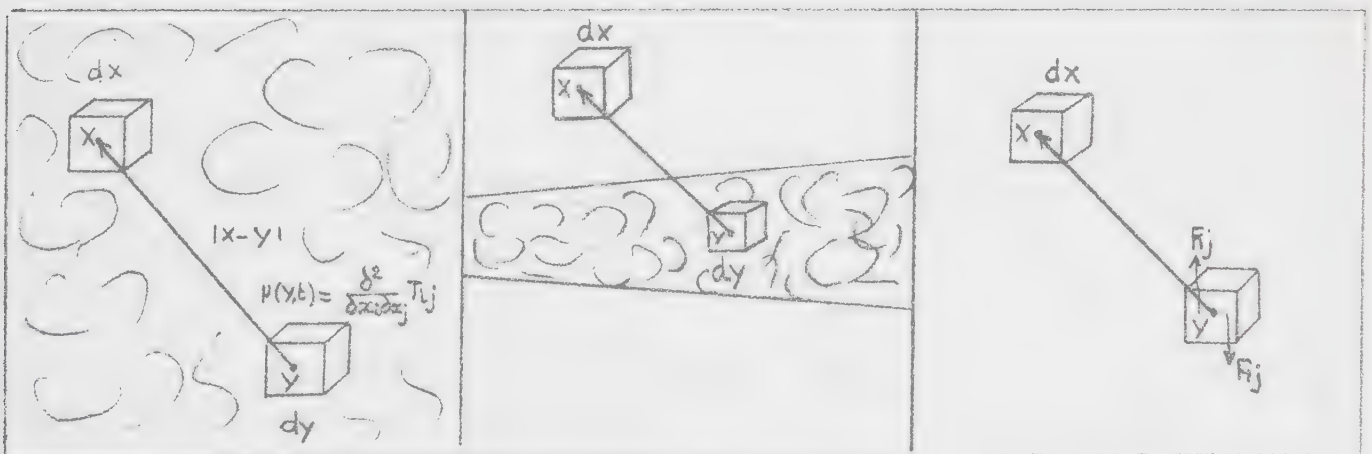
$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - a_0^2 \Delta \rho = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij} \quad (2-17)$$

La solution de cette équation est celle du potentiel retardé : c'est la valeur de la masse spécifique en X à l'instant t : $\rho(X, t)$, provenant de chaque point Y à l'intérieur du volume dY considéré comme étant affecté d'une densité

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij}$$

(Figure 2-9 a).

$$\{\rho - \rho_0\}(X, t) = \frac{1}{4\pi a_0^2} \iiint \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ \frac{T_{ij}(Y, t - \frac{|X-Y|}{a_0})}{|X-Y|} \right\} dY \quad (2-18)$$



(a)

(b)

(c)

Fig. 2-9

Si nous considérons maintenant un écoulement turbulent, on peut supposer que les valeurs de T_{ij} dans l'air au repos, en dehors de l'écoulement, sont négligeables devant celles affectant les points à l'intérieur de l'écoulement turbulent qui, seul, apporte une contribution significative (Figure 2-9b)

On considère maintenant un espace contenant du gaz au repos et, dans cet espace, un point X recevant une émission en provenance de Y. On sait qu'une émission dipôle est créée par l'action d'une force F_i appliquée en Y ; de même une émission quadripôle sera créée en Y par deux forces constantes, égales et opposées (Figure 2-10)

L'équation caractéristique d'une grandeur du champ acoustique (par exemple ρ) sera alors :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - a_0^2 \Delta \rho = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F_{ij} \quad (2-19)$$

On voit que les relations (2-18) et (2-19) sont équivalentes ; la valeur de $\rho(X, t)$ engendrée par le petit volume turbulent dY , sous l'action des forces T_{ij} , est la même que celle engendrée dans un gaz au repos par le même volume dY , contenant une source quadripôle, dont la force par unité de volume est F_{ij} . En réalité, la solution de (1) est plus complexe car le terme T_{ij} dépend lui aussi de ρ par le terme $\rho u_i u_j$

Si on suppose que l'on peut obtenir une bonne approximation de T_{ij} par un terme relativement simple, ne dépendant pas de ρ , on obtient une expression dans laquelle le son est engendré par une distribution continue de sources aérodynamiques quadripôles, de forces connues, qui peut s'écrire :

$$\{\rho - \rho_0\}(X, t) = \frac{1}{4\pi a_0^3} \iiint_{dY} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|X - Y|^3} \{\ddot{T}_{ij}\}(Y, t - \frac{|X - Y|}{a_0}) dY \quad (2-20)$$

Soit, pour des distances suffisamment grandes et un petit volume élémentaire

Ve

$$\{\rho - \rho_0\}(X, t) = \frac{1}{4\pi a_0^3} \frac{x_i x_j}{r^3} V_e \{\ddot{T}_{ij}\}(t - \frac{r}{a_0}) \quad r = |X - Y| \quad (2-21)$$

Si l'on considère maintenant un jet en écoulement subsonique, dont la vitesse de convection est U_c (nombre de Mach $M_c = U_c/\alpha_0$), on peut représenter l'écoulement turbulent d'un jet comme étant divisé en plusieurs petits volumes élémentaires V_e tels que :

1/ Les forces des quadripôles T_{ij} à l'intérieur de chaque volume élémentaire sont en corrélation parfaite ;

2/ Les forces sont sans aucune corrélation pour des points situés dans des volumes élémentaires différents.

Pour un petit volume élémentaire en mouvement, dans lequel la force du quadripôle par unité de volume est T_{ij} , le champ de radiation sonore dans la direction θ (angle entre la direction de l'émission et l'axe du jet) est alors :

$$\{p - p_0\}(x, t) = \frac{x_i x_j V_e}{4\pi\alpha_0^4 (1 - M_c \cos \theta)^3} \ddot{T}_{ij}(t - \frac{r}{\alpha_0}) \quad (2-22)$$

b) Jet à grande vitesse - Rappels de la théorie de J.E. Ffowcs-Williams [23]

A grande vitesse, la situation est plus complexe. Le mouvement de convection peut avoir un effet prononcé sur l'efficacité du rayonnement des sources quadripôles par effet Doppler. Lorsque ces sources se rapprochent d'un observateur, avec précisément la vitesse du son, le facteur dû à l'effet Doppler $(1 - M_c \cos \theta)$ devient singulier, et le problème du rayonnement subit un changement complet de caractère.

L'efficacité d'un quadripôle est basse, puisque celui-ci est composé de quatre sources mutuellement opposées ; si celles-ci étaient entendues simultanément, aucun rayonnement acoustique n'en résulterait, et l'émission acoustique qui apparaît est due aux effets de temps retardé.

Donc, lorsqu'un quadripôle se dirige vers un observateur avec la vitesse du son, les ondes émises par les sources les plus distantes du quadripôle n'atteignent jamais les sources voisines, et chaque source est entendue séparément. C'est le phénomène d'onde de Mach, lorsque les quadripôles dégènèrent dans leurs constituants élémentaires.

Un volume élémentaire en mouvement supersonique est acoustiquement équivalent à un quadripôle, dont le rayonnement est augmenté de l'effet Doppler, sauf dans la direction où il voyage à la vitesse du son.

Dans cette direction se propagent des ondes de Mach, dont la force est supérieure à celle des autres ondes apparaissant dans les jets supersoniques.

2.2.2. Bruit de Cisaillement

L'idée originale de Lighthill était que la turbulence dans les régions fortement cisailées près de l'orifice de sortie du jet était dominante dans le mécanisme de génération du bruit. La loi donnant la puissance totale du bruit rayonnée proportionnelle à la 8ième puissance de la vitesse du jet est confirmée expérimentalement pour les vitesses subsoniques. Mais pour les vitesses supersoniques elle est inapplicable, laissant supposer d'autres mécanismes de production du bruit. On a vu dans le paragraphe précédent que J.E.Ffowcs-Williams, a eu l'idée du bruit rayonné sous forme d'ondes de Mach, en élargissant au régime supersonique la théorie de Lighthill, mais il n'y a aucune évidence concrète que les ondes de Mach soient engendrées par des remous tourbillonnaires. D'où la supposition faite par C.K.W. Tam [105] en 1971 d'un autre mécanisme responsable de ce bruit.

Sur des ombrogrammes du champ acoustique d'un jet, Lowson et Hollerhead (1968) [64-65] Dosanjh et Yu (1969) [48] ont pu observer que de fortes ondes directionnelles sont émises par la couche de cisaillement près de l'orifice de sortie du jet. Ces ondes apparaissent plus ou moins comme des lignes droites parallèles, lorsque le jet s'écoule dans des conditions de détente optima (jet libre de choc). La présence des ondes de choc dans la structure d'un jet, sous ou surdétendu, n'entraîne qu'une légère courbure de ces ondes. Cette émission acoustique se propage vers l'extérieur en aval ; de plus, les ondes semblent exister seulement dans une zone limitée de l'espace, en aval de la tuyère. (Figure 2-10).

En 1971, une analyse théorique de ce phénomène a été proposée par C.K.W. Tam, ces ondes acoustiques seraient la conséquence directe de l'instabilité de la couche de cisaillement à la frontière du jet. De petites perturbations formées en amont dans la tuyère sont transportées vers l'extérieur, et deviennent capables d'exciter le mode instable de la couche de cisaillement à la frontière du jet.

L'instabilité ainsi excitée engendre l'émission d'ondes directionnelles, formant l'émission acoustique caractéristique observée. Cette émission n'a pas de fréquence particulière mais s'étend sur toute la bande de fréquences correspondant à l'instabilité du jet.

L'analyse de C.K.W. Tam est basée sur les considérations suivantes :

a) On est en présence d'une couche mince tourbillonnaire, s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$; la partie comprise entre $-\infty$ et 0 est en fait la paroi de la tuyère qui engendre l'écoulement ; donc, dans cette région, la couche mince ne peut être soumise à aucune perturbation.

b) A l'orifice de sortie, une perturbation due à la turbulence, transportée depuis l'amont hors de la tuyère, agit sur la couche de cisaillement sous la forme d'une fluctuation de pression. (On néglige la détente à la sortie, ce qui suppose une tuyère supersonique fonctionnant dans les conditions de pression idéales). Le résultat est une perturbation temporellement sinusoïdale et grossissant exponentiellement vers l'aval ; la perturbation de pression se propageant à l'intérieur du jet est considérée comme la somme de la perturbation résultante et de la perturbation initiale. (Figure 2-10)

Cette méthode va nous permettre, par la suite, d'imaginer une analyse inspirée de celle de C.K.W. Tam, pour traiter le problème d'un jet excité par une émission acoustique extérieure.

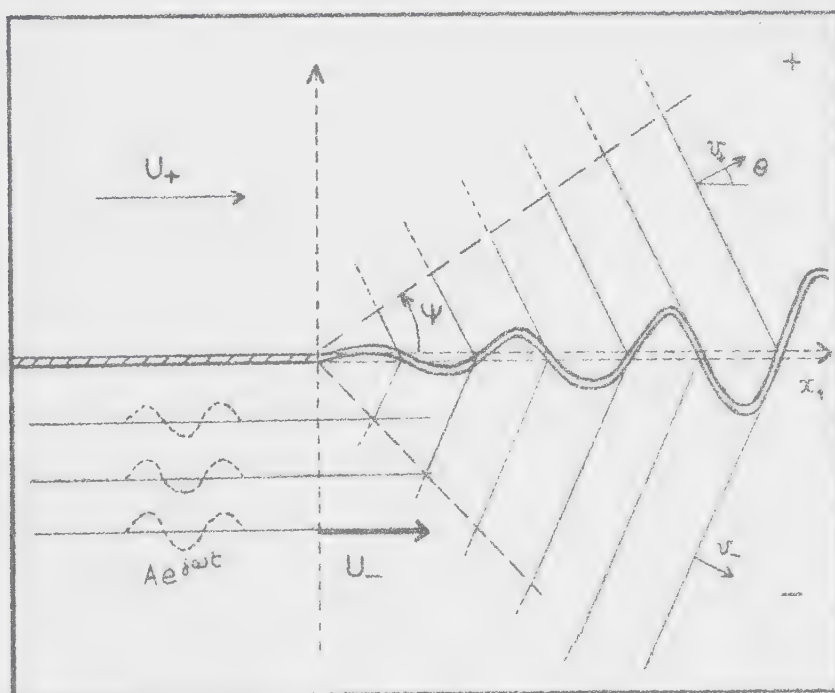


Fig. 2-10

2.2.3. Emission acoustique à fréquence discrète - Théorie de A. Powell

En plus du bruit de turbulence et du bruit de cisaillement s'étendant sur un large spectre de fréquences, il apparaît dans des circonstances favorables (jets structurés) des émissions acoustiques à fréquence discrète de grande intensité. C'est A. Powell en 1953 [95] qui a été le premier à considérer ce phénomène comme étant la conséquence d'un processus d'autoentretien.

Pour donner une explication du champ acoustique, il suggère le mécanisme suivant :

- On suppose que des ondes acoustiques se déplaçant vers l'amont parallèlement au jet, sont susceptibles d'influencer la stabilité au voisinage de l'orifice de sortie, et donnent ainsi naissance à des perturbations embryonnaires. Ces perturbations périodiques (dont la période est celle des ondes acoustiques qui les ont engendrées) sont transportées en aval à une certaine vitesse et sont amplifiées pendant leur parcours ; à partir d'une certaine distance, elles possèdent une énergie capable de produire, au passage des ondes de choc associées au système cellulaire, une énergie acoustique suffisante pour perpétuer le processus périodique.

L'influence du son sur l'écoulement d'un jet a été le sujet de nombreuses expériences ; on a montré, entre autre, que la nature de l'écoulement pouvait être modifiée si les ondes sonores pouvaient agir sur le jet au voisinage de l'orifice de sortie. Ceci, est la base du phénomène des "jets sensibles" laminaires, dans lesquels une perturbation prend naissance dans l'écoulement. Le phénomène associé au "son d'arête" a aussi été observé en utilisant des jets turbulents.

A. Powell a montré que les dimensions du système sont compatibles avec le mécanisme proposé, et que celui-ci est capable d'expliquer les faits d'expériences prédominants concernant le champ acoustique. L'examen photographique montre que le système de perturbations périodiques de l'écoulement et le diagramme cellulaire ont des grandeurs mesurables.

D'autre part, on observe une source effective d'émission acoustique située en aval. Si l'on considère qu'il existe des sources distinctes, situées à chacune des extrémités des cellules, ayant entre elles une certaine relation, on peut toujours supposer qu'elles se composent pour former la source effective observée. On peut alors proposer le mécanisme simplifié suivant :

a) une perturbation voyageant dans l'écoulement crée effectivement une onde sonore en traversant la section du jet où est située la source effective.

b) Cette onde progresse en amont et produit une perturbation de courant à l'orifice de sortie du jet.

c) Cette perturbation produit à son tour une onde acoustique en atteignant la source effective. Le phénomène s'entretient ainsi de lui-même.

Le mécanisme d'A. Powell (Figure 2-11) est très simplifiée ; lorsqu'on affirme qu'une perturbation donne naissance à une onde sonore, on suppose en fait qu'une certaine phase de la perturbation périodique est associée à une certaine phase de l'onde acoustique qu'elle engendre.

La phase particulière considérée de l'onde acoustique engendre une perturbation à l'origine du jet, mais cette perturbation de courant n'est pas nécessairement dans

la même phase que celle qui est responsable de la phase de l'onde acoustique. On dira que la perturbation embryonnaire de courant est retardée d'une certaine quantité par rapport à la phase associée que nous avons définie.

D'autre part, il n'y a pas nécessairement un seul cycle de perturbation de courant entre les extrémités du mécanisme. Les vitesses et les distances peuvent être telles qu'il puisse exister plusieurs cycles (plusieurs ondes sonores sont alors produites pendant le temps mis par la perturbation pour atteindre la source effective.

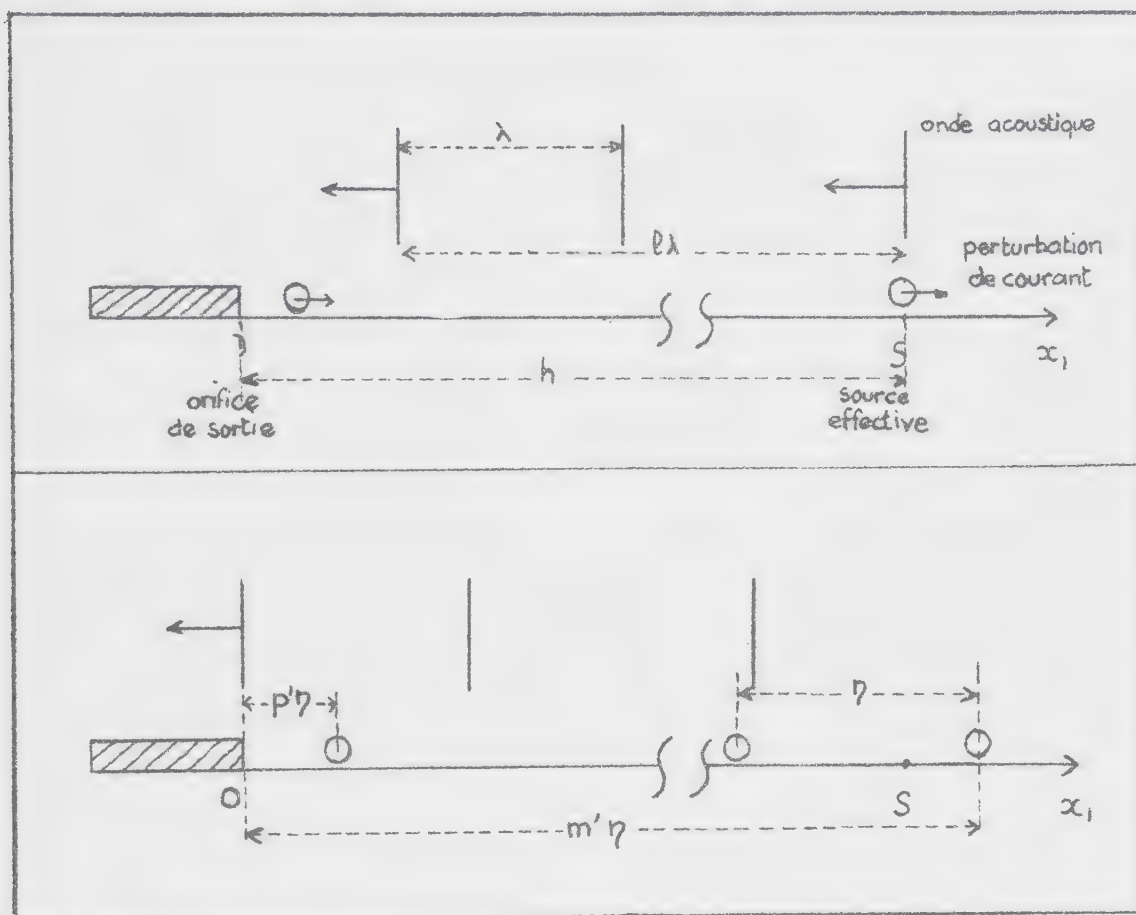


Fig. 2-11

h : distance de la source effective à l'orifice de sortie

λ : longueur d'onde de l'émission acoustique

η : longueur d'onde la perturbation de courant

ℓ : nombre entier de longueur d'ondes de l'émission contenu entre l'orifice de sortie et la source effective.

$p'\eta$: distance entre l'orifice de sortie et la plus proche perturbation de courant.

$n'\eta$: distance entre la perturbation de courant la plus proche de l'orifice de sortie et celle la plus proche de la source effective (en aval)

$M = \frac{\lambda}{\eta}$: nombre de Mach de la perturbation.

D'après ce schéma on peut obtenir les relations suivantes :

$$h = (p' + m')\eta - M(h - \ell\lambda)$$

en posant

$$p' + m' = k'$$

$$h = k'M\lambda - M\lambda + M\ell\lambda$$

$$(\ell + k')M\lambda = (1 + M)h \quad (2-23)$$

L'hypothèse suivant laquelle les perturbations de courant sont la conséquence de l'effet des ondes acoustiques sur le voisinage immédiat de l'orifice de sortie est validé par l'accord constaté par A. Powell entre les dimensions estimées du système et les résultats expérimentaux. En particulier les mesures de η et de h permettent de trouver une valeur de k' constante : $k' = 1,88$.

Nous devons cependant remarquer que, dans son raisonnement, A. Powell utilise l'émission résultante dont la source effective est située à une distance h de l'orifice de sortie qui est observable mais difficilement mesurable.

D'autre part, cette valeur h ne fait pas partie des grandeurs fixes du système : en effet, les valeurs de h et les longueurs d'ondes possibles sont en fait simplement liées par la relation (2-23) obtenue ci-dessus. Cette relation en aucun cas ne peut être suffisante pour donner les valeurs de λ compatibles avec le système ; A. Powell ne l'a utilisée que pour vérifier que les dimensions du système étaient compatibles avec ses hypothèses.

3. POSITION DU PROBLEME DE L'EMISSION ACOUSTIQUE A FREQUENCE DISCRETE

3.1. ACTION DU CHAMP ACOUSTIQUE SUR L'ECOULEMENT D'UN JET

Les conditions de l'écoulement d'un jet sont étroitement régies par le rapport des pressions génératrices amont et aval. Si le champ ambiant est soumis à de petites variations périodiques de pression, l'angle de détente et la vitesse du jet sont soumis à une variation de même période.

On peut analyser l'effet de ces variations à l'orifice de sortie de la tuyère sur l'origine du jet, et en particulier la création d'une petite vitesse de perturbation initiale. (Figure 3-1).

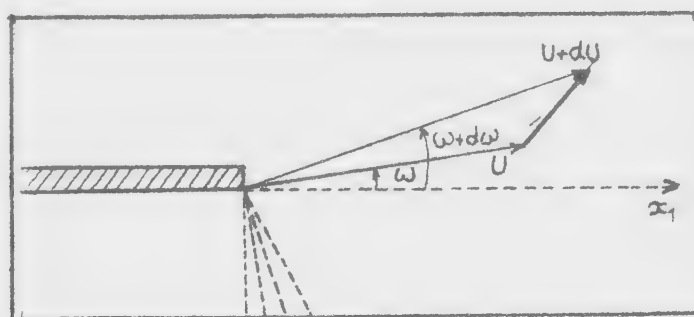


Fig. 3-1

La vitesse après la détente est donnée par

$$U = a_0 \left[\frac{2}{\gamma-1} (1-P) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3-11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \text{vitesse du son ambiante} \\ P = \left(\frac{p_0}{p_a} \right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p_0}{p_a} \right)^{-\frac{2}{\gamma}} \\ p_0 = \text{pression génératrice amont} \\ p_a = \text{pression ambiante} \end{array} \right.$$

l'angle de détente ω que font entre elles les vitesses avant et après la détente est donné par la relation :

$$\omega = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}} \arccos\left(\frac{\gamma+1}{2} P\right)^{\frac{1}{2}} + \arcsin\left(\frac{\gamma-1}{2} \frac{P}{1-P}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{2} \quad (3-12)$$

Les variations longitudinales et transversales de la vitesse sont alors

$$\begin{cases} u = dV \\ v = U d\omega \end{cases} \quad \begin{cases} u = -a_0 \frac{\sqrt{5}}{7} \frac{P}{[1-P]^{\frac{1}{2}}} \frac{\pi a}{Pa} e^{j\omega t} \\ v = -a_0 \frac{\sqrt{5}}{7} \left[\frac{P(5-6P)}{1-P} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\pi a}{Pa} e^{j\omega t} \end{cases} \quad (3-13)$$

$\pi a e^{j\omega t}$ étant la variation de pression acoustique à l'orifice de sortie.

On constate donc à l'orifice de sortie du jet la formation d'une perturbation initiale de vitesse (Voir chapitre 4-1). Ceci n'est qu'une explication simple du mécanisme de création d'une perturbation initiale. Jusqu'à présent, ce problème n'a pas été résolu théoriquement, et J.E. Ffowcs Williams pour la partie théorique et P. Poldervaart pour la partie expérimentale ont entamé cette étude.

Du point de vue expérimental, P.J. Poldevaart a pu observer, sous l'effet d'une onde acoustique plane la formation d'un tourbillon à la frontière libre du jet, grossissant tout en étant emporté vers l'aval par l'écoulement. On remarque notamment qu'il existe un certain temps entre le passage de l'onde acoustique à l'origine du jet et la formation du tourbillon.

3.2. PROPAGATION D'UNE PERTURBATION INITIALE

Nous devons maintenant considérer le problème sous deux aspects :

a) Propagation d'une perturbation de pression

L'écoulement est idéalisé de la manière suivante : la couche limite libre du jet est réduite à une couche mince tourbillonnaire. Si nous considérons l'écoulement sans viscosité, il se produit un glissement fini à la surface où les deux masses fluides entrent en contact. Cette surface est appelée couche mince tourbillonnaire. On analyse alors le problème en considérant la stabilité d'un jet idéalisé, soumis à l'action d'une émission acoustique évoluant dans le milieu extérieur.

b) Propagation d'une perturbation de vitesse rotationnelle :

On considère que la couche limite libre du jet n'est plus mince, et que le profil des vitesses dans la zone de mélange initiale est connu. Le problème est analysé en considérant la stabilité du jet soumis à l'action d'une perturbation initiale de vitesse rotationnelle.

3.2. A CHAMP IRROTATIONNEL COMPRESSIBLE

1/ Généralités

La base fondamentale du problème de la stabilité de l'écoulement d'un jet compressible est l'étude du mouvement perturbé d'une couche mince séparant deux milieux s'écoulant à des vitesses différentes.

Le cas le plus simple que l'on puisse étudier est celui d'une couche mince tourbillonnaire plane séparant deux masses de fluide, s'écoulant à des vitesses différentes sans mouvements relatifs internes. Le cas de l'écoulement incompressible a fait l'objet, le siècle dernier, des travaux classiques de Helmholtz, Rayleigh [100] et Kelvin ; celui de l'écoulement compressible n'a été étudié que depuis les vingt cinq dernières années, surtout du point de vue expérimental par L. Landau [50] H. Hatanaka [35] et I. Pai [88] et a été développé d'un point de vue théorique par J.W. Miles [76] en 1958.

Les études sur la stabilité d'une couche mince tourbillonnaire ont permis de conclure que, sous certaines conditions, une couche fine de cisaillement (ou couche mince tourbillonnaire) est instable. La solution formelle du problème d'une couche mince tourbillonnaire plane, dans un fluide compressible non visqueux, a été obtenue par J.W. Miles au moyen de la transformation de Fourier-Laplace : si une couche mince tourbillonnaire est soumise à l'action d'une faible perturbation sinusoïdale dans l'espace, la perturbation grossit exponentiellement avec le temps en chaque point de l'espace, dans le mode instable.

Cependant, dans le cas d'un jet, l'onde observée ne grossit pas avec le temps, dont elle dépend sinusoïdalement, mais s'amplifie exponentiellement avec la distance aval.

L'étude faite par C.K.W. Tam [45] en 1971 sur ce sujet, montre qu'une des conséquences directes de l'instabilité de la couche de cisaillement à la frontière libre du jet, est la formation d'ondes directionnelles se propageant dans une région limitée de l'espace. Pour cela, il considère que le jet est excité par une faible perturbation temporellement sinusoïdale, provenant de l'intérieur de la tuyère, et emportée par l'écoulement.

Nous nous sommes proposés, en tenant compte de la méthode employée par C.K.W. Tam, d'étudier le problème de la puissante émission extérieure à fréquence discrète. Cette émission atteint l'orifice de sortie du jet avec une certaine amplitude, et agit sur l'origine du jet en y faisant varier les conditions de détente (contrairement à l'étude de Tam dans laquelle la détente est négligée).

2. Position du problème

2.1. On considère l'écoulement, à des vitesses différentes, de deux fluides idéaux, désignés par les indices + et -, séparés par une couche mince tourbillonnaire (on suppose le même rapport de chaleur spécifique pour les deux fluides).

Pour $x_1 = 0$, on remplace la couche mince tourbillonnaire par une paroi rigide séparant les deux écoulements, représentant la paroi de la tuyère.

Dans le milieu + le fluide s'écoule à la pression ambiante à la vitesse U_+

Dans le milieu -, l'écoulement à la vitesse U_- est produit par la détente à l'orifice de sortie de la tuyère située à $x_1 = 0$

Le problème que nous nous proposons d'étudier est celui de l'effet produit par une émission extérieure périodique sur la couche mince tourbillonnaire séparant les deux milieux, ainsi que le champ de pression de perturbation engendré dans chacun des deux milieux. Dans notre analyse nous nous référons principalement aux travaux fondamentaux de J.W. Miles et C.K.W. Tam.

2.2. Nous allons rapidement exposer les positions des problèmes traités par Miles et par Tam, de façon à définir notre propre position sur le problème de l'émission extérieure.

a) Le problème considéré par Miles est celui d'une couche mince tourbillonnaire, s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$ et soumise aux effets d'une perturbation initiale ($t=0$) spatialement sinusoïdale ; c'est-à-dire qu'à l'instant initial $t = 0$, la couche de cisaillement n'a encore subi l'effet d'aucune perturbation, et est alors soumise en tous ses points à une vitesse transversale dans la direction des x_1 .

Il en résulte, lorsqu'on trouve dans le mode instable, une perturbation sinusoïdale grossissant exponentiellement avec le temps (fig. 3-2)

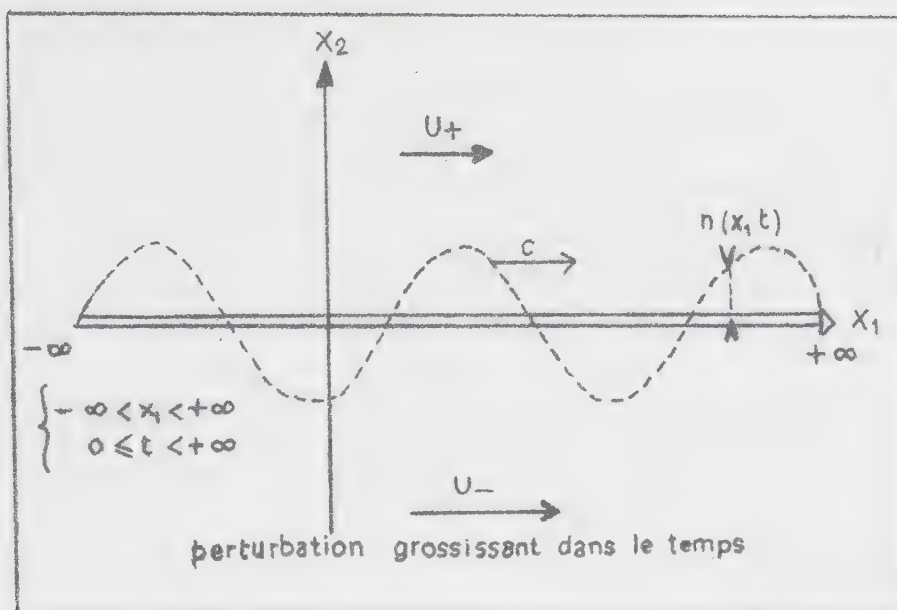


Fig. 3-2

b) Le problème considéré par Tam est celui d'une couche mince tourbillonnaire s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$. La partie s'étendant de $-\infty$ à 0 est en fait la paroi de la tuyère qui engendre l'écoulement, ce qui signifie que la couche mince tourbillonnaire entre $-\infty$ et 0 ne peut être soumise à aucune perturbation (Fig. 3-3)

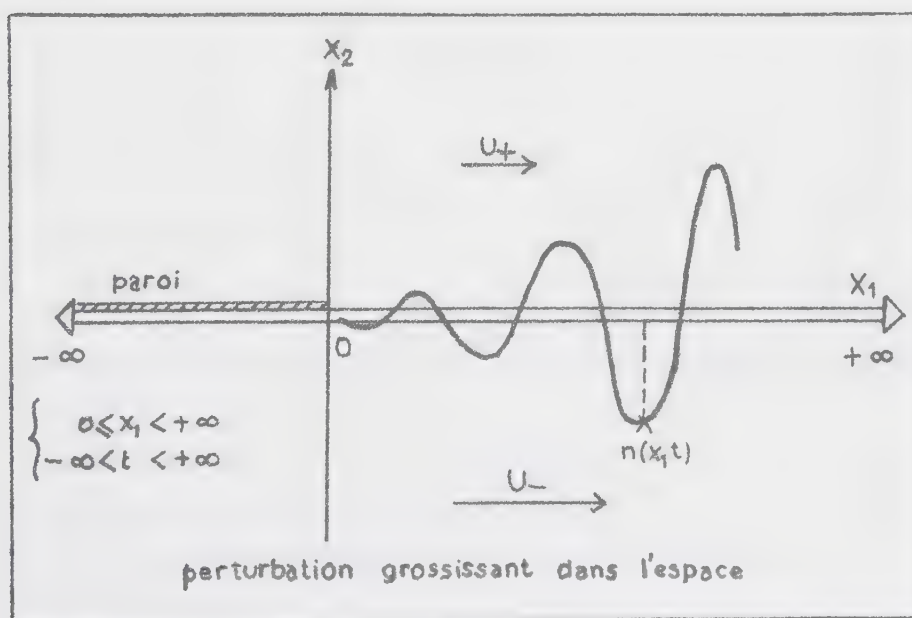


Fig. 3-3

A l'orifice de sortie, une perturbation due à la turbulence, transportée depuis l'amont hors de la tuyère, agit sur la couche de cisaillement sous forme de fluctuation de pression. La détente subie par le fluide, lorsqu'il quitte la tuyère est négligée, c'est-à-dire qu'on considère une tuyère supersonique fonctionnant dans les conditions idéales. Il en résulte une perturbation temporellement sinusoïdale, grossissant exponentiellement avec la distance aval.

La perturbation de pression à l'intérieur du jet est alors considérée comme la somme de la perturbation initiale et de la perturbation résultante (Fig.3-4).

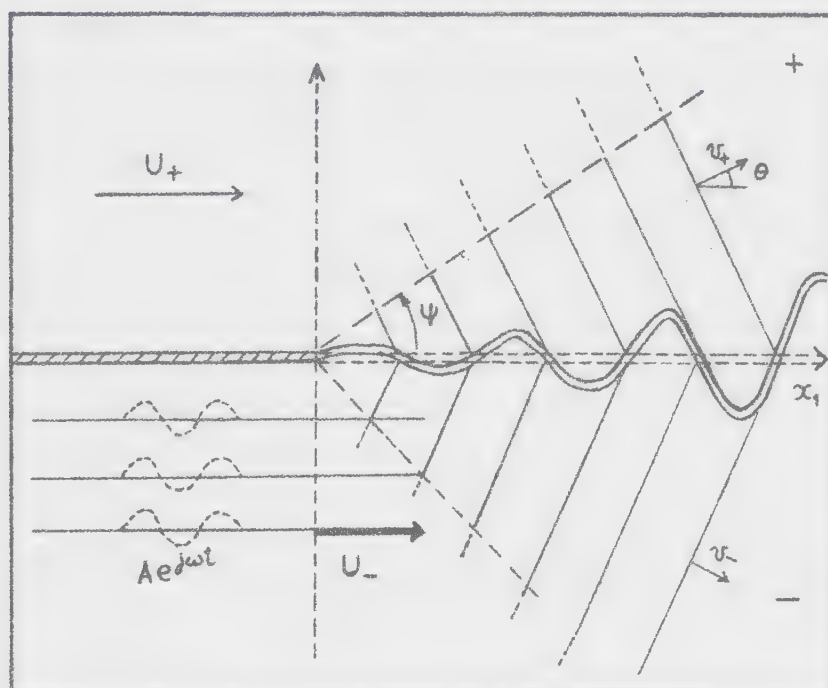


Fig. 3-4

Pour résumer :

a) Miles considère que

$$\begin{cases} x_1 \text{ varie de } -\infty \text{ à } +\infty \\ t \text{ varie de } 0 \text{ à } +\infty \end{cases}$$

- les conditions initiales sont celles considérées en chaque point de x_1 à l'instant initial $t = 0$

- la méthode de transformation utilisé :

$$\begin{cases} \text{la transformée de Fourier pour les } x_1 \\ \text{la transformée de Laplace pour les } t \end{cases}$$

b) Tam considère que

$$\begin{cases} x_1 & \text{varie de } 0 \text{ à } +\infty \\ t & \text{varie de } -\infty \text{ à } +\infty \end{cases}$$

En effet l'action perturbatrice appliquée en $x_1 = 0$ est sans aucune influence amont ; d'autre part on suppose que toutes les perturbations ont été créées au temps $t = 0$, les conditions initiales étant alors supposées toutes nulles. La solution du problème est considérée à un instant t , toutes les perturbations initiales ayant alors été entraînées.

2.3. En tenant compte des considérations précédentes, nous allons définir maintenant la position de notre propre problème, celui d'un jet sonique se détendant à l'orifice de sortie, sur lequel agit une forte émission acoustique, se propageant dans le milieu extérieur. Nous sommes amenés à adopter de nouvelles hypothèses :

a) Dans la méthode de transformation nous utiliserons :

$$\begin{cases} \text{la transformée de Laplace pour les } x_1 & 0 < x_1 < \infty \\ \text{la transformée de Fourier pour les } t & -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

b) Au contraire de Tam, nous ne négligerons pas la détente à l'orifice de sortie et les conditions initiales à la couche de cisaillement ($x_1 = 0$) ne sont pas nulles ; en particulier la vitesse transversale n'est pas nulle quelle que soit la variation dans le temps des conditions extérieures.

- Le problème se présente donc de la manière suivante (Fig. 3-5)

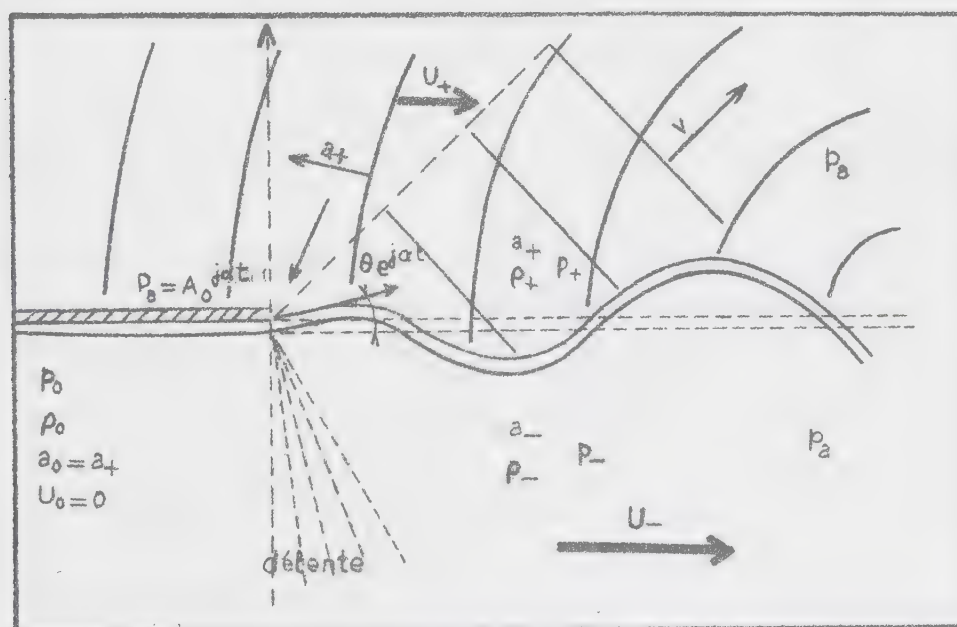


Fig. 3-5

a) l'écoulement d'un jet est formé par une tuyère.

$$b) \begin{cases} \text{les conditions initiales amont sont} & : & p_0 & \rho_0 & a_0 & U_0 = 0 \\ \text{les conditions dans le milieu extérieur} & : & p_a & \rho_a & a_a = a_\infty & U_a \\ \text{les conditions après la détente} & : & p_- & \rho_- & a_- & U_- \end{cases}$$

c) Dans le milieu extérieur + se trouve une source d'émission acoustique, telle que la pression acoustique le long de la frontière $x_2 = h$ est de la forme

$$B f(x_1) e^{j\alpha t} \quad \alpha > 0 \text{ réel}$$

$$f(x_1) = 1 \text{ pour } x_1 = 0$$

et que l'angle de détente du jet est de la forme $\theta e^{j\alpha t}$
(on peut supposer sans nuire à la généralité du problème que l'angle initial de détente est nul).

3. Formulation du problème

3.1. Soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées dans l'espace à trois dimensions :

coordonnées cartésiennes écoulement plan

coordonnées cylindriques écoulement cylindrique.

Considérons deux fluides idéaux occupant l'espace $|x_2| < h$ et $|x_2| > h$ désignés respectivement par les indices - et +

$$h \begin{cases} \text{demi largeur du jet écoulement plan} \\ \text{rayon du jet écoulement cylindrique} \end{cases}$$

Ces deux milieux sont caractérisés par $a_\pm, \rho_\pm, U_\pm$ respectivement : vitesse du son, masse spécifique et vitesse d'écoulement principale dans la direction x_1 .

Ces deux fluides sont séparés par une couche mince tourbillonnaire, plane ou cylindrique, soumise à une perturbation sinusoïdale $B f(x_1) e^{j\alpha t}$

$$\text{avec } B \begin{cases} \text{écoulement plan} & \begin{cases} A & \text{pour } |x_3| < \ell \\ 0 & \text{pour } |x_3| > \ell \end{cases} \\ \text{écoulement cylindrique} & A e^{j m x_3} \end{cases}$$

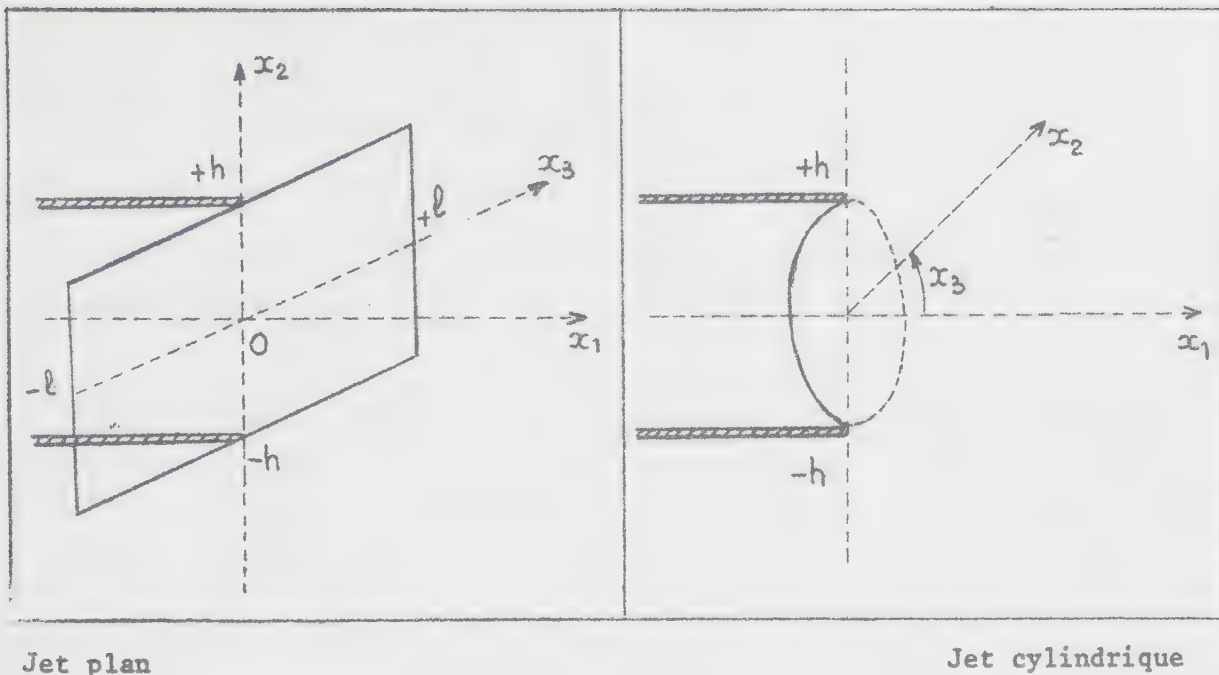


Fig. 3-6

3.2. Equation de propagation

Les perturbations de pression engendrées, supposées faibles vis à vis des pressions de chaque milieu, obéissent à l'équation de propagation des faibles perturbations

$$\frac{D^2 p_{\pm}}{Dt^2} = a_{\pm}^2 \nabla^2 p_{\pm} \quad (3-2-1)$$

3.3. Conditions aux limites

3.3.1. A la couche mince tourbillonnaire $x_2 = h + n(x_1, x_3, t)$

n déplacement de la couche mince sous l'effet de la perturbation

a) La couche mince tourbillonnaire est une surface d'écoulement commune aux deux milieux (le mouvement fluide est tangent à la couche mince).

$$\frac{1}{\rho_{\pm}} \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{D^2 n}{Dt^2} \quad (3-2-2)$$

b) Il y a continuité des pressions au passage de la couche mince tourbillonnaire.

$$P_a + p_- = P_a + p_+ + Bf(x_1) e^{j\omega t} \quad (3-2-3)$$

3.3.2. A l'infini

Quand $|x_2| \rightarrow \infty, P_+ \rightarrow 0$

(3-2-4)

3.3.3. Au plan ou à l'axe de symétrie $x_2 = 0$

Deux cas sont à envisager :

a) perturbation antisymétrique pour un écoulement plan ou m impair pour un écoulement cylindrique

$$p_- = 0$$

(3-2-5)a

b) perturbation symétrique pour un écoulement plan ou m pair pour un écoulement cylindrique

$$\frac{\partial p_-}{\partial t} = 0$$

(3-2-5)b

Remarque Dans l'expérience on a pu constater qu'il existait les deux régimes :

Pour des faibles rapports de pressions génératrices on observait une pulsion du jet correspondant à une perturbation symétrique ;

pour les rapports plus grands on observait une oscillation du jet :

- perturbation antisymétrique pour un jet plan,
- perturbation spiralée pour un jet cylindrique.

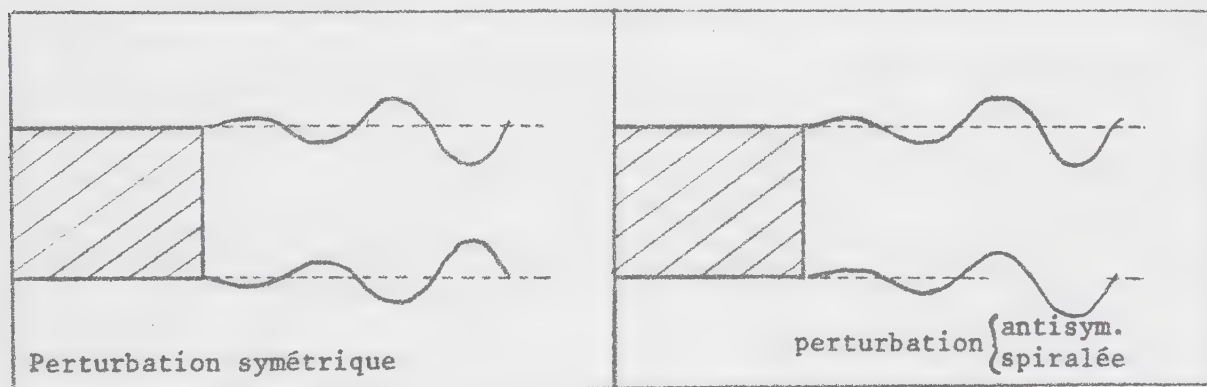


Fig. 3-7

3.4. Conditions initiales $x_1 = 0$

$$n(x_1, t) = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial n}{\partial x_1}(x_1, t) = \begin{cases} \theta e^{j\omega t} \delta(|x_3 - \ell|) \\ \theta e^{j\omega t} e^{jm x_3} \end{cases} \quad (b) \quad (3-2-6)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x_1, t) = 0 \quad (c)$$

4. Résolution du problème (Voir détail chapitre 4-2)

On utilise la méthode de transformation de Fourier Laplace,

$$\begin{array}{lll} -\infty < t < +\infty & \text{Transformation de Fourier} & k \text{ complexe} \\ 0 < x_1 < \infty & \text{transformation de Laplace} & \omega \text{ réel} \end{array}$$

Ce qui permet d'exprimer l'équation d'onde transformée sous une forme simple ne dépendant plus que d'une seule variable sans dimension $y(x_2)$.

On obtient ainsi les équations différentielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} P'' + n = 0 & \text{écoulement plan} \\ P'' + \frac{1}{y} P' + \left(1 - \frac{m^2}{y^2}\right) P = 0 & \text{écoulement cylindrique} \end{array} \right. \quad (3-2-7)$$

La solution générale se présente sous la forme simple suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_-(y_-) = C_- G(y_-) \\ P_+(y_+) = C_+ G(y_+) \end{array} \right. \quad (3-2-8)$$

Les constantes $C_{\pm}$ sont déterminées par les conditions aux limites.

	$G_-(y_-)$	$G_+(y_+)$
Écoulement plan $\left\{ \begin{array}{l} \text{symétrique} \\ \text{antisymétrique} \end{array} \right.$	$2 \cos y_- $ $\pm 2 j \sin y_- $	$e^{j y_+ } = \cos y_+ + j \sin y_+ $ $\pm e^{-j y_+ } = \pm [\cos y_+ - j \sin y_+]$
Écoulement cylindrique	$J_m(y_-)$	$H_m^{(1)}(y_+) = J_m(y_+) + j N_m(y_+)$

(3-2-9)

En tenant compte des conditions aux limites la solution transformée pour la pression peut s'écrire sous la forme

$$P(\omega, k, y) = F(\omega, k, y) \delta(\omega - \alpha) \quad (3-2-10)$$

La solution du problème est donnée par la transformée inverse

$$\begin{aligned}
 p(t, x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty+i\delta}^{+\infty+i\delta} F(\omega, k, y) \delta(\omega - \alpha) e^{j(\omega t - k x_1)} d\omega dk \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty+i\delta}^{+\infty+i\delta} F(\alpha, k, y) e^{j(\alpha t - k x_1)} dk
 \end{aligned} \tag{3-2-11}$$

Nous devons donc intégrer dans le plan des k complexes. On peut faire apparaître de suite la vitesse complexe $\alpha_+ c$ de propagation en posant $k = \frac{\alpha}{\alpha_+ c} = \frac{\alpha}{\alpha_+} c^*$ avec $c = \frac{1}{c^*}$

(3-2-12)

et on considère alors le plan complexe des c^*

$$p(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty+i\delta'}^{+\infty+i\delta'} F(\alpha, c^*, y) e^{j\alpha(t - \frac{c^*}{\alpha_+} x_1)} dc^* \tag{3-2-13}$$

Pour intégrer (3-13) nous devons connaître les pôles de $F(\alpha, c^*, y)$ dans le plan des c^* complexes.

La solution définitive dans le milieu (-) (intérieur du jet) se met sous la forme :

$$\begin{aligned}
 p_-(t, x_1, x_2) &\sim e^{j \frac{\alpha}{\alpha_+ (c_r^2 + c_i^2)^{\frac{1}{2}}} [c_r x_1 + (c_r \beta_r + c_i \beta_i)(x_2 - h) - \alpha_+ (c_r^2 + c_i^2) t]} \\
 &\times e^{\frac{\alpha}{\alpha_+ (c_r^2 + c_i^2)^{\frac{1}{2}}} [c_i x_1 - (c_r \beta_i - c_i \beta_r)(x_2 - h)]}
 \end{aligned} \tag{3-2-14}$$

avec pour pôle $c_o^* = \frac{1}{c_o} = \frac{1}{c_r + j c_i}$

(3-2-15)

et

$$\beta = \beta_r + j\beta_i$$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_+ &= \left| \left(c - \frac{U_+}{a_+} \right)^2 - 1 \right|^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right. \quad (a)$$

(3-2-16)

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_- &= \frac{a_+}{a_-} \left| \left(c - \frac{U_-}{a_-} \right)^2 - 1 \right|^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right. \quad (b)$$

La perturbation de pression se présente donc comme une onde se propageant dans la direction φ définie par :

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{c_r \beta_r + c_i \beta_i}{c_r} \quad (3-2-17)$$

la vitesse de propagation dans cette direction a la valeur

$$v_- = \frac{a_+ (c_r^2 + c_i^2)^{\frac{1}{2}}}{[c_r^2 + (c_r \beta_r + c_i \beta_i)^2]^{\frac{1}{2}}} \neq a_- \quad (3-2-18)$$

($v_- \neq a_-$ s'explique par le fait que l'écoulement est instable)

Cette onde grossit exponentiellement vers l'aval avec un taux donné par la valeur :

$$\frac{\alpha}{a_+ (c_r^2 + c_i^2)^{\frac{1}{2}}} [c_i x_1 - (c_r \beta_i - c_i \beta_r)(x_2 - h)] \quad (3-2-19)$$

on voit aussi qu'à droite de la ligne définie par

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{c_r \beta_i - c_i \beta_r}{c_i} \quad (3-2-20)$$

l'onde de pression va décroître rapidement de façon exponentielle.

5. Conclusion

Cette analyse nous a permis de préciser la position du problème de l'émission à fréquence discrète. On a pu ainsi se rendre compte que la méthode de transformation de Fourier - Laplace pouvait s'appliquer à notre problème. Il est en effet possible d'atteindre par le calcul les valeurs recherchées : vitesse de propagation et grossissement spatial d'une perturbation de pression engendrée dans le jet sous l'effet d'une émission extérieure.

Nous avons pour cela considéré les conditions initiales à $x_1 = 0$ (sortie de la tuyère).

$$\begin{cases} n(t,0) = 0 \\ \dot{n}(t,0) = \theta e^{j\alpha t} \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \text{ réel}$$

(n étant l'oscillation de la couche mince).

en supposant
$$\begin{cases} 0 < x_1 < +\infty \\ -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

Cette hypothèse est justifiée car les ondes instables ne se propagent que dans la direction aval, depuis le lieu où elles ont été originellement créées, c'est-à-dire à la sortie de la tuyère pour $x_1 \geq 0$. D'autre part, le régime transitoire ayant disparu, on peut considérer que le régime permanent existe depuis un temps infini.

Dans la transformation de Fourier - Laplace utilisée, nous avons choisi ω réel et k complexe ; dans la transformation inverse on prendra $\omega = \alpha$

En posant ensuite $k = \alpha C^*$ on obtient pour l'oscillation de la couche mince par exemple

$$n(x_1, t) \sim e^{-j\alpha(t - C_{0r}^* x_1)} e^{\alpha C_{0i}^* x_1}$$

avec
$$\begin{cases} \frac{1}{C_{0r}^*} : \text{vitesse de propagation} \\ C_{0i}^* : \text{taux de grossissement spatial} \end{cases}$$

3.2.B FORMATION TOURBILLONNAIRE DANS UNE COUCHE LIMITE LIBRE

1. Généralités

Les couches limites des jets non bordés par des parois sont appelées couches limites libres. Cette couche limite libre peut s'enrouler en tourbillons, et la turbulence commence lorsque ces tourbillons se détruisent. Ces tourbillons n'ont pas un potentiel d'écoulement connu, mais on peut les définir par une concentration locale de rotationnel.

L'écoulement dans une couche limite libre est approximativement parallèle pour de grands nombres de Reynolds, et les résultats obtenus pour des écoulements parallèles peuvent être appliqués aux couches limites libres.

Le problème de la formation des tourbillons a été étudié pour la première fois par Helmholtz (1863) qui a montré qu'une couche limite libre doit s'enrouler. Plus tard, en 1880, Lord Rayleigh [100] a montré qu'un profil des vitesses avec point d'inflexion est instable à certaines perturbations, si on néglige la viscosité. L'explication physique de cette évolution n'a été donnée que bien plus tard par Lin [61] en 1955 : une perturbation du rotationnel dans un profil des vitesses avec point d'inflexion grossit dans le temps, par induction mutuelle de tous les éléments tourbillons, et ceci sans tenir compte de la viscosité, qui n'a qu'une influence d'amortissement.

Comme les profils des couches limites libres ont toujours un ou plusieurs points d'inflexion, il pourra toujours exister des perturbations amplifiées, et nous pourrions supposer, comme Helmholtz, que la couche limite libre s'enroulera.

Si des tourbillons sont formés de cette manière durant le processus d'enroulement, on peut supposer qu'il y a concentration du rotationnel.

Cette hypothèse sur la formation des tourbillons dans les couches limites libres a, depuis été prouvée par des recherches théoriques et expérimentales dues en particulier à Lessen [55] (1950), Esch [22] (1957), Tatsumi-Kakutani [117] (1958), Sato [140] (1960), Schade-Michalke (1962), Michalke-Wille (1964), confirmant entre autre que la viscosité n'affectait pas notablement les propriétés d'instabilité des couches limites libres.

Par contre, peu d'études se rapportent à l'enroulement des couches limites libres. A. Michalke [72] (1963) a étudié d'une manière approchée le processus d'enroulement de la couche de cisaillement linéaire, correspondant à une couche tourbillonnaire épaisse. L'analyse est faite en utilisant la théorie linéaire de la stabilité pour un enroulement non visqueux. En particulier, le développement temporel de la couche de cisaillement perturbée montre le processus d'enroulement avec concentration de tourbillons individuels dans certains points de l'écoulement.

Ces résultats sont obtenus de manière simplifiée avec, soit des profils avec saut dans le cas de la couche mince, soit des profils en ligne brisée dans le cas d'une couche de cisaillement linéaire ; ils ne donnent pas une représentation satisfaisante du processus réel, d'autant plus que ces profils ne sont pas réalisables expérimentalement.

Le profil de vitesse le plus simple du point de vue analytique et se rapprochant le plus du profil expérimental est le profil en tangente hyperbolique. Le problème doit donc s'analyser pour une couche tourbillonnaire ayant ce profil de vitesse, en tenant compte de la théorie de la stabilité.

2. Instabilité spatiale

Les propriétés de l'instabilité ne peuvent pas être décrites par la théorie linéarisée de la stabilité, pour des perturbations grossissant avec le temps dans des écoulements non visqueux. En effet, l'étude expérimentale de Stato (1960) montre que la couche de cisaillement, excitée par le son d'un haut parleur, engendre des perturbations grossissant exponentiellement vers l'aval. De même, dans le cas d'un jet, l'émission acoustique à fréquence discrète engendre des perturbations grossissant spatialement. Si l'on veut comparer le taux de grossissement obtenu par la théorie linéarisée (Lessen 1950) pour une couche de cisaillement donnée, on transforme linéairement le taux de grossissement temporel des perturbations en un taux de grossissement spatial, au moyen de la vitesse de phase de la perturbation.

Mais les résultats de la comparaison sont décevants :

Freythuth [29] 1965 arrive alors à la conclusion que l'amplification des perturbations ne peut être trouvée que par une théorie de la stabilité pour des perturbations grossissant spatialement. Dans ce but A. Michalke [72] a étudié les propriétés des perturbations grossissant spatialement dans une couche de cisaillement en écoulement non visqueux, en utilisant un profil de vitesse en th.

3. Position du problème

On considère une couche de cisaillement de profil de vitesse $U(y)$ indépendant de x , dans laquelle l'écoulement incompressible est supposé sans viscosité. On se propose de calculer la vitesse de propagation et le taux de grossissement spatial d'une perturbation créée dans la couche de cisaillement.

L'écoulement d'un fluide non visqueux incompressible rationnel est gouverné par l'équation d'Helmholtz :

$$\frac{D\Omega}{Dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial t} + u_i \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} \quad (3-2-21)$$

$u_i(x,t)$ composantes de la vitesse de perturbation $\vec{C}$

$$\begin{aligned} \vec{C} &= (u_1, u_2, 0) \\ \text{rot } \vec{C} &= (0, 0, \Omega) \end{aligned} \quad \Omega(x_1, x_2, t) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

Considérons maintenant l'écoulement de base dans la couche de cisaillement ; il est permanent, indirectionnel et défini par son profil des vitesses $U(x_2)$.

Posons :

$$\Omega_0(x_2) = - \frac{\partial U}{\partial x_2} = -U' \quad (3-2-22)$$

Surimposons à l'écoulement de base une petite perturbation de grandeur petite, ayant comme composantes

$$\begin{aligned} \text{de la vitesse} \quad & \varepsilon u_i^*(x_1, x_2, t) \quad (a) \\ & \varepsilon u_2^*(x_1, x_2, t) \quad (b) \\ \text{du rotationnel} \quad & \varepsilon \Omega^*(x_1, x_2, t) \quad (c) \end{aligned} \quad (3-2-23)$$

On a donc

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, t) = U(x_2) + \varepsilon u_1^*(x_1, x_2, t) & (a) \\ u_2(x_1, x_2, t) = \varepsilon u_2^*(x_1, x_2, t) & (b) \\ \Omega(x_1, x_2, t) = \Omega_0(x_2) + \varepsilon \Omega^*(x_1, x_2, t) & (c) \end{cases} \quad (3-2-24)$$

L'équation (3-2-21) devient :

$$\varepsilon \frac{\partial \Omega^*}{\partial t} + U + \varepsilon u_1^* \frac{\partial \Omega^*}{\partial t} + \varepsilon u_2^* (U'' - \varepsilon \frac{\partial \Omega^*}{\partial x_2}) = 0 \quad (3-2-25)$$

Cette équation n'est pas linéaire et dépend de ε . Cependant on peut obtenir la linéarisation en supposant :

$$\begin{cases} U \gg \varepsilon u_1^* \\ U'' \gg \varepsilon \frac{\partial \Omega^*}{\partial x_2} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + U \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} - U'' \mu_2^* = 0 \quad (3-2-26)$$

Définissons une fonction de courant $\Psi(x_1, x_2, t)$ telle que

$$\begin{cases} \mu_1^* = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \\ \mu_2^* = - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \end{cases}$$

Considérons les perturbations ondulatoires :

$$\begin{cases} \Psi_1(x_1, x_2, t) = \mathcal{R} \{ \phi(x_2) e^{-j(\alpha t - \beta x_1)} \} & (a) \\ \Omega_1(x_1, x_2, t) = \mathcal{R} \{ \omega(x_2) e^{-j(\alpha t - \beta x_1)} \} & (b) \end{cases} \quad (3-2-27)$$

On obtient ainsi :

$$(U - \frac{\alpha}{\beta}) [\phi'' - \alpha^2 \phi] - U \phi = 0 \quad (3-2-28)$$

avec pour conditions aux limites :

$$x_2 \rightarrow \pm \infty \implies \phi = 0 ; U'' = 0$$

En posant $\phi(x_2) = e^{\int \Phi(x_2) dx_2}$, on obtient :

$$\Phi' = \beta^2 + U''(U - \frac{\alpha}{\beta}) - \Phi^2 \quad \text{avec} \quad \Phi(\pm \infty) = \mp \beta \quad (3-2-29)$$

Dans le cas où $\beta(\alpha) = 0$ nous avons un grossissement spatial des perturbations. C'est le cas que nous devons considérer.

L'intégration de (3-29) détermine la valeur de

$$\beta(\alpha_r) = \beta_r + j \beta_i$$

c'est-à-dire la vitesse de propagation $\vec{c}$

le taux de grossissement spatial β_i

3.3; INTERACTION PERTURBATIONS-ONDES DE CHOC

Dans les chapitres précédents, nous avons pu observer la création d'une perturbation initiale ainsi que le grossissement exponentiel de cette perturbation lors de sa propagation vers l'aval de l'écoulement.

Cette perturbation initiale se décompose en deux perturbations de base : perturbation de pression (Chap. 3-2-A) et perturbation de rotationnel (Chap. 3-2-B). Dans ces deux chapitres, nous avons étudié les méthodes qui peuvent nous permettre d'atteindre les deux grandeurs qui nous intéressent principalement, la vitesse de propagation et le taux de grossissement spatial.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'étude du phénomène qui survient lorsque ces perturbations amplifiées atteignent une onde de choc de la structure du jet. Nous avons donc analysé le problème général de l'interaction avec une onde de choc de toutes les perturbations possibles en mouvement dans un écoulement isentropique compressible supposé uniforme. Dans un tel milieu, les seules perturbations possibles sont de trois types : perturbation de pression, de vitesse rotationnelle isentropique et d'entropie. On sait que l'interaction de l'une de ces trois perturbations de base avec une onde de choc engendre simultanément les trois perturbations de base.

Notre attention s'est plus particulièrement portée sur le cas de l'interaction d'un tourbillon isolé avec une onde de choc, et ceci pour deux raisons :

a) Cette interaction engendre une onde acoustique d'un niveau sonore important ; donc l'interaction d'une perturbation de rotationnel avec le choc semble être à la base de l'émission résultante à fréquence discrète qui demeure toujours le problème auquel nous nous intéressons.

b) D'autre part, cette étude peut être abordée expérimentalement en utilisant un appareillage approprié (tube à choc) et des méthodes optiques de visualisation (cinématographie ultra-rapide).

Ce tourbillon isolé est produit par l'écoulement d'air qui suit immédiatement l'onde de choc dans la chambre basse pression de notre tube à choc T_2 (longueur 18 m - section $0,08 \times 0,16$ m) sur un profil d'aile incliné à 5° .

L'onde de choc primaire se réfléchit sur le fond de la chambre basse pression et vient rencontrer, dans le champ d'observation, le tourbillon détaché du bord de fuite de la maquette.

L'onde acoustique résultante est centrée sur le tourbillon transmis immobile, et son front comprend quatre zones de compressions et détentes alternatives.

L'étude théorique se fonde sur les travaux complémentaires de H.S. RIBNER et F.K. MOORE qui nous ont permis d'établir une méthode qui nous est propre.

Nous confrontons ensuite les résultats expérimentaux à la théorie appliquée au cas étudié.

H.S. RIBNER a traité le problème de l'interaction d'une onde de choc et d'un tourbillon en utilisant un profil de vitesse discontinu simplifié (alors que nous utilisons un profil de vitesse continu et théoriquement exact).

Il décompose la perturbation de vitesse rotationnelle (tourbillon) en ondes élémentaires sinusoïdales planes (éléments de la décomposition en série de Fourier, suivant toutes les directions et tous les nombres d'onde, de la perturbation considérée).

Il fait ensuite interférer, avec le choc, chacune des ondes élémentaires, et il reconstitue le tourbillon transmis et l'onde acoustique engendrée par interaction des ondes élémentaires créées par la rencontre.

Par ailleurs, F.K. MOORE a traité la partie constituée par l'interaction avec une onde plane quelconque mais sans en faire une analyse tout à fait complète.

A partir de ces travaux, nous avons construit une méthode d'analyse dont les principaux points sont les suivants :

1. Une perturbation quelconque est caractérisée par une vitesse de perturbation quelconque. Celle-ci se décompose en trois parties :

- Une vitesse longitudinale correspondant à une onde de pression,
- Une vitesse de cisaillement transversale se divisant en deux :

Une partie correspond à une vitesse de cisaillement isentropique, l'autre partie à une onde d'entropie.

2. Chacune des perturbations (pression, vitesse rotationnelle isentropique, entropie) peuvent être décomposées en ondes élémentaires sinusoïdales planes.

3. On simplifie l'analyse en rendant permanent le problème de l'interaction d'une onde sinusoïdale plane et d'un choc oblique plan. Pour cela on choisit un système d'axes de référence approprié, différent pour chacune des ondes élémentaires étudiées séparément.

4. Les équations fondamentales de la dynamique exprimées dans ces axes permettent d'obtenir l'équation différentielle générale du mouvement perturbé.

5. Les relations du choc oblique pour l'écoulement perturbé, exprimées elles aussi dans ces axes permettent d'obtenir toutes les grandeurs (vitesses de cisaillement, pression, masse spécifique, température, variation d'entropie, variation d'enthalpie) derrière le choc en fonction d'une seule variable qui est :

- la vitesse de cisaillement incidente dans le cas d'une perturbation de vitesse rotationnelle ou d'entropie,
- la pression incidente dans le cas d'une perturbation de pression.

6. Ces relations au choc permettent d'évaluer le second membre de l'équation différentielle générale de l'écoulement en fonction de la variable complexe (vitesse de cisaillement ou pression incidentes), en tenant compte de la déformation du choc qui est une autre inconnue du problème.

7. L'équation différentielle admet pour solution la somme de deux solutions particulière et complémentaire :

- la solution particulière s'exprime en fonction de la variable connue (vitesse ou pression incidentes) et de la variable inconnue (déformation du choc).
- la solution complémentaire introduit une autre inconnue, la constante d'intégration.

On obtient ainsi un système de quatre équations à quatre inconnues (perturbation de choc et constante d'intégration complexes) dont la résolution détermine la solution pour une onde incidente élémentaire.

8. Les résultats obtenus pour chaque onde élémentaire sont intégrés et donnent la reconstitution derrière le choc, constituée des trois perturbations de base.

La résolution numérique de cette analyse est faite dans le cas que nous avons étudié expérimentalement ; la comparaison des résultats théoriques et expérimentaux permettent de juger la validité de la méthode.

1. Position du problème

Considérons, dans un système d'axes x, y , un écoulement principal permanent, auquel se superpose un faible champ non permanent dû à une perturbation quelconque. Cet écoulement est traversé par une onde de choc plane de vitesse $(\bar{U}_c, 0)$.

L'écoulement principal de part et d'autre du choc est celui d'un fluide parfait permanent isentropique caractérisé par $\bar{W}'(\bar{U}_n, \bar{V})$; $\bar{p}$; $\bar{\rho}$; $\bar{T}$ respectivement vitesse, pression, masse spécifique, température.

Les grandeurs dues à la perturbation sont notées par $q(u, v)$; p ; ρ ; T . (Les grandeurs surlignées correspondent à l'écoulement principal ; les grandeurs non surlignées à la perturbation).

On notera les écoulements incidents et résultant respectivement par les indices i et r .

Dans l'écoulement de perturbation incident, la variation de pression est liée à une vitesse longitudinale et la variation d'entropie à une vitesse transversale de cisaillement.

Lorsqu'on écrit les équations fondamentales de la dynamique pour l'écoulement perturbé, dans un système d'axes de référence, se déplaçant avec l'écoulement principal, on obtient un système de trois équations de base : (Voir chap. 4-3-1)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ non permanent} \quad (3-3-1)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\bar{p}} - \gamma \frac{\rho}{\bar{\rho}} \right) = 0 \quad (3-3-2)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (3-3-3)$$

permanent

Tout champ de perturbation satisfaisant ces équations linéaires peut être décomposé (dans un système d'axes de référence suivant l'écoulement principal) en deux parties, l'une permanente, l'autre non permanente.

Donc un champ de faible perturbation peut être considéré comme contenant :

- a) une perturbation non permanente irrationnelle isentropique (ondes planes sonores),
- b) une perturbation permanente rotationnelle produite par des ondes de cisaillement avec entropie ou densité variables. (Voir chap. 4-3-2).

2. Decomposition en ondes élémentaires sinusoïdales planes

Soit $q(r, \varphi, t)$ une vitesse exprimée en coordonnées polaires dont les composantes sont $u(r, \varphi, t)$, $v(r, \varphi, t)$.

La transformation de Fourier est faite pour les variables r et φ respectivement transformée en k et α .

$$F_q(k, \alpha) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} q(r, \varphi) e^{-ikr \cos(\alpha - \varphi)} r dr d\varphi \quad (3-3-4)$$

Les transformées inverses donnent :

$$q(r, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} F_q(k, \alpha) e^{ikr \cos(\alpha - \varphi)} k dk d\alpha \quad (3-3-5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{d'où : } \mathcal{R} \left\{ \frac{\partial^2 q}{\partial k^2 \partial \alpha} \right\} &= k F_q(k, \alpha) \sin k\hat{r} \\ \hat{r} &= r \cos(\alpha - \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (3-3-6)$$

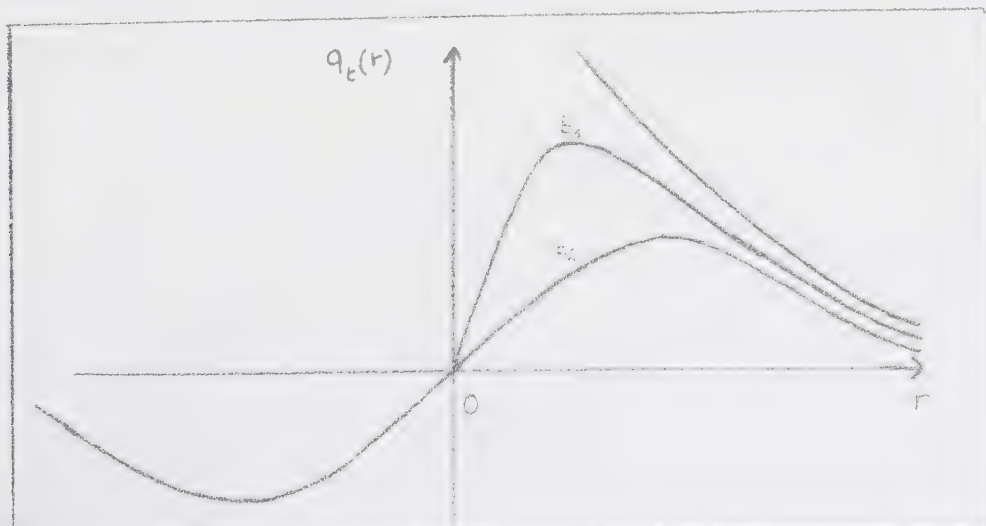
Ce qui représente une onde sinusoïdale plane ayant pour amplitude $k F_q(k, \alpha)$

Application au tourbillon isolé

Le tourbillon isolé présente une symétrie de révolution autour de son centre 0, et sa vitesse, tangente aux lignes de courant (cercles centrés en 0) s'exprime à l'instant donné t par une relation indépendante de φ :

$$q(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right] \quad (\text{Voir chap. 4-3-3}) \quad (3-3-7)$$

Γ circulation du tourbillon



Utilisons la transformation de Fourier précédente. (Voir chap. 4-3-4)

$$u(r, \varphi) = q(r, \varphi) \sin \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - e^{-\frac{r^2}{4\gamma t}} \right] \sin \varphi \quad (3-3-8)$$

$$u(z, \varphi) = \frac{\Gamma}{8\pi^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left[\int_0^{2\pi} \left[\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\gamma t}} \right) \sin \varphi e^{-jkr \cos(\alpha - \varphi)} \right] dr d\varphi e^{jkr \cos(\alpha - \varphi)} \right] k dk d\alpha \quad (3-5-1)$$

$$= \frac{\Gamma}{8\pi^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\infty I_1 dr - \int_0^\infty I_1 e^{-\frac{r^2}{4\gamma t}} dr \right] e^{jkr \cos(\alpha - \varphi)} k dk d\alpha$$

Avec

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sin \varphi e^{-jkr \cos(\alpha - \varphi)} d\varphi$$

$$I_1 = -2j\pi \sin \alpha J_1(kr)$$

calculons

$$I_2 = \int_0^\infty I_1 dr$$

$$I_3 = \int_0^\infty I_1 e^{-\frac{r^2}{4\gamma t}} dr$$

$$I_2 = -\frac{2j\pi \sin \alpha}{k}$$

$$I_3 = 2j\pi \sin \alpha \int_0^\infty J_1(kr) e^{-\frac{r^2}{4\gamma t}} dr = \frac{2j\pi \sin \alpha}{k} \left[1 - e^{-\gamma t k^2} \right]$$

$$I_2 + I_3 = -\frac{2j\pi \sin \alpha}{k} e^{-\gamma t k^2}$$

On obtient ainsi:

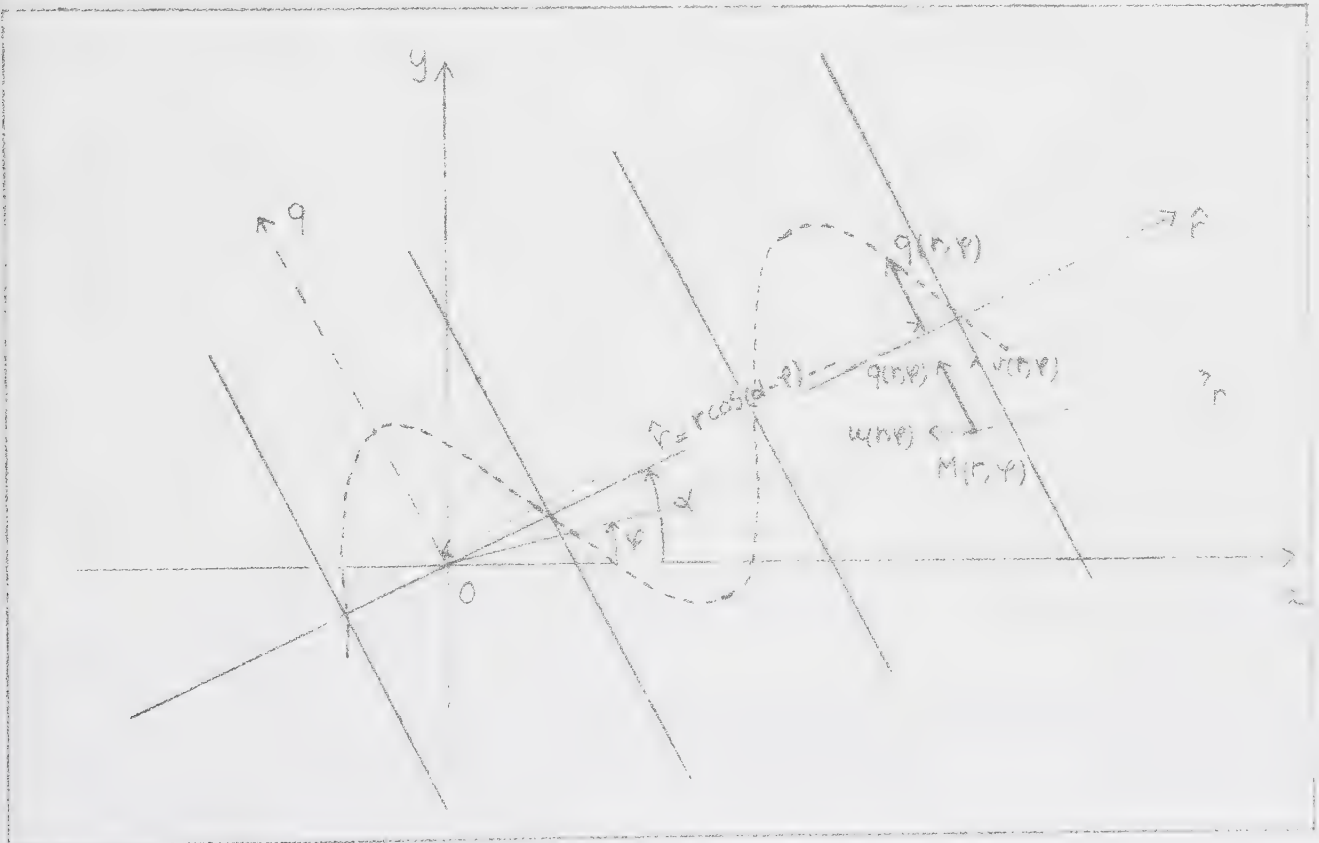
$$q(r, \varphi) = -\frac{i\Gamma}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\sqrt{k^2 + j} R \cos(\alpha - \varphi)} dk d\alpha \quad (3-3-10)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R} \left\{ \frac{\partial^2 q}{\partial k \partial \alpha} \right\} &= -\frac{\Gamma}{4\pi^2} e^{-\sqrt{k^2 + j} R} \sin k \hat{r} \\ \hat{r} &= r \cos(\alpha - \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (3-3-11)$$

avec :

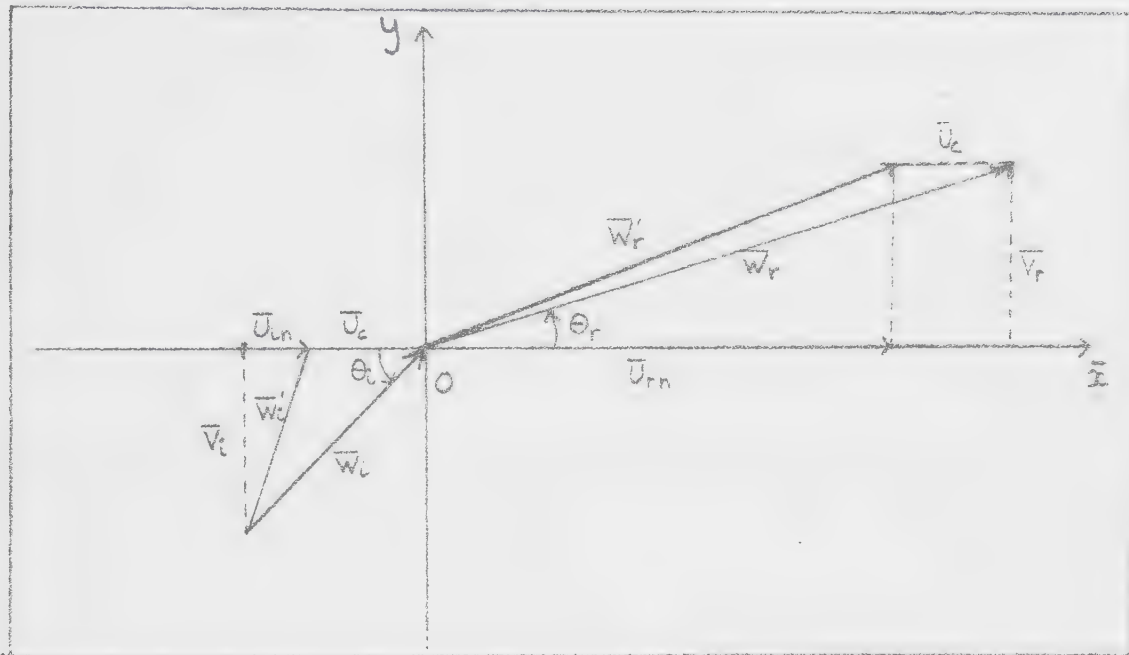
$$\hat{r} = r \cos(\alpha - \varphi)$$

Ceci représente une onde sinusoïdale plane ayant pour amplitude $\frac{\Gamma}{4\pi^2} e^{-\sqrt{k^2 + j} R}$



3. Problème permanent équivalent

3.1. Écoulement non perturbé



On choisit un système de référence $(\bar{x}, y)$ lié au choc de telle sorte que celui-ci paraisse immobile.

Les vitesses d'écoulement sont $\bar{W}(\bar{U} = \bar{U}_n + \bar{U}_c ; \bar{V})$ et font avec l'axe des $\bar{x}$ les angles θ

3.2. Écoulement perturbé

Dans le milieu incident en écoulement permanent, on crée une petite perturbation initiale élémentaire représentée par ses vecteurs vitesse $\vec{w}_l$ et d'onde $\vec{k}_l$ faisant avec l'axe des x les angles θ'_l et φ_l respectivement.

Cette perturbation quelconque se décompose en deux perturbations :

a) une perturbation de vitesse longitudinale se propageant à la vitesse du son, transportée par l'écoulement,

b) une perturbation de vitesse transversale transportée par l'écoulement. Elle produit d'autre part une déformation élémentaire du choc qui se décompose en ondes sinusoïdales.

Les deux problèmes ondes transversales et ondes longitudinales sont traités séparément. Dans chaque cas on utilise un changement d'axe adéquat de manière à rendre permanente la déformation du choc. On stoppe les lignes de phase de la

perturbation sinusoïdale en ajoutant à $\bar{V}$ la vitesse de propagation de l'onde le long du choc. Le problème rendu permanent est plus accessible à l'analyse.

3.3. Pour résumer la position du problème, les grandes lignes de l'analyse sont donc les suivantes :

a) Le problème est posé comme le calcul du champ d'écoulement derrière une onde de choc plane oblique, produit par le passage à travers le choc d'une onde plane sinusoïdale d'une certaine inclinaison. Cette onde élémentaire est supposée faible pour assurer que les perturbations considérées dans l'écoulement principal sont petites.

b) Le problème pour lequel l'écoulement n'est pas permanent, est converti en un problème équivalent d'écoulement permanent, en utilisant un nouveau système de référence en mouvement.

Dans ce système, le choc en mouvement, parcouru par une ondulation progressive est transformé en un choc ondulé fixe.

c) L'analyse se formule maintenant comme un problème aux valeurs limites, pour l'écoulement en aval du choc. L'équation différentielle partielle qui régit cet écoulement faiblement perturbé en dérive. Les relations du choc oblique nous donnent les conditions limites pour les composantes de la vitesse juste derrière le choc.

d) La recomposition du champ créé par toutes les ondes élémentaires ayant traversé le choc, constitue la solution définitive après interaction.

4. Equation différentielle générale de l'écoulement perturbé (Voir chap. 4-3-6)

On écrit l'équation générale de l'écoulement perturbé dans un nouveau système d'axes de référence $(O\xi, O\eta)$ respectivement parallèle et normal à l'écoulement principal.

Les composantes de la vitesse de perturbation suivant ces axes étant u' et v' , les équations de la dynamique permettent d'obtenir l'équation générale du mouvement perturbé dans ce système d'axes

$$\left. \begin{aligned} \rho \operatorname{div} \vec{w} &= 0 \\ \vec{w} \operatorname{grad} \omega + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p &= 0 \\ \operatorname{grad} s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-3-13)$$

ce qui entraîne

$$\left(1 - \frac{\bar{w}^2}{a^2}\right) \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \frac{\partial v'}{\partial \eta} = \Omega \quad (3-3-14)$$

Le vecteur $\vec{\Omega}$ est défini par $\Omega = \frac{\partial v'}{\partial \xi} - \frac{\partial u'}{\partial \eta}$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} u' = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \\ v' = -\left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{cases}$$

L'équation générale s'écrit :

$$\left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -\Omega$$

On obtient facilement :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{W} (\vec{\operatorname{grad}} H - T \vec{\operatorname{grad}} s)$$

avec $\vec{\operatorname{grad}} = \frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ $\vec{n}$ vecteur normal à $\vec{W}$, donc $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \eta}$

$$\text{d'où} \quad \left(1 - \frac{\bar{w}^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \frac{1}{W} \frac{\partial H}{\partial \eta} - T \frac{\partial s}{\partial \eta} \quad (3-3-15)$$

5 Relations du choc oblique

Les équations fondamentales de la dynamique donnent pour le mouvement perturbé les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i \bar{u}_i + \bar{p}_i u_i = \rho_r \bar{u}_r + \bar{p}_r u_r \\ \bar{u}_i u_i + C_p T_i = \bar{u}_r u_r + C_p T_r \\ \bar{u}_i u_r + \bar{u}_r u_i = 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} [\bar{u}_i u_i + C_p T_i] \\ \frac{p}{\rho} = \frac{p}{\rho} \frac{T}{T} \quad ; \quad \frac{\delta s}{C_p} = \frac{p}{\rho a^2} - \frac{p}{\rho} \end{array} \right. \quad (3-3-16)$$

Remarque : Les relations du choc oblique pour l'écoulement perturbé s'écrivent dans les axes $(O\bar{\xi}, O\bar{\eta})$ respectivement normal et parallèle au choc déformé.

Ces nouveaux axes $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ font avec $(\bar{x}, \bar{y})$ un angle faible $\bar{\epsilon}(\bar{y}) = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \epsilon$ ϵ étant la déformation du choc.

Avec une rotation $\bar{\epsilon}$ des axes on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u(\bar{x}) + \bar{v} \bar{\epsilon} \\ v = v(\bar{y}) - \bar{u} \bar{\epsilon} \end{array} \right. \quad (3-3-17)$$

Les relations du choc oblique (15) permettent de calculer les conditions au choc Voir Chapitre 4-3-8.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_r}{\bar{u}_c} = A_1 \frac{u_i}{\bar{u}_c} + B_1 \frac{p_i}{\bar{p}_c} \\ \frac{p_r}{\bar{p}_r} = A_2 \frac{u_i}{\bar{u}_c} + B_2 \frac{p_i}{\bar{p}_c} \\ \frac{p_r}{\bar{p}_r} = A_3 \frac{u_i}{\bar{u}_c} + B_3 \frac{p}{\bar{p}_c} \end{array} \right. \quad (3-3-18)$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_1 = -\frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_c^2} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M_c^2\right) & B_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{2}{\gamma M_c M_c} \\ A_2 = \frac{2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_c^2} \frac{M_c}{M_c} & B_2 = \frac{1}{\gamma} \left[1 - \frac{\gamma-1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_c^2}\right] \\ A_3 = \frac{2 \gamma M_c}{\gamma M_c^2 - \frac{\gamma-1}{2}} & B_3 = \frac{M_c^2 - \frac{\gamma-1}{2}}{\gamma M_c^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \end{array} \right.$$

et $\frac{v_r}{v_c} = \frac{w_i}{v_c} \frac{\sin \theta'_i}{\cos \theta_i} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{y}} \frac{M_c}{M_c}$ (3-3-19)

Dans le cas d'une onde de cisaillement (Voir Chapitre 4-3-9)

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'_i = \theta_i = \frac{\pi}{2} - \varphi_i \\ p_i = 0 \end{array} \right. \quad (3-3-20)$$

Les conditions au choc deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_r}{v_c} = A_1 \frac{w_i}{v_c} ; \quad \frac{p_r}{p_r} = A_2 \frac{w_i}{v_c} ; \quad \frac{p_r}{p_r} = A_3 \frac{w_i}{v_c} \\ \frac{v_r}{v_c} = \frac{w_i}{v_c} \tan \theta_i - \frac{\varepsilon'_i}{\delta} \end{array} \right. \quad (3-3-21)$$

avec $\delta = \frac{M_c}{M_c}$

La vitesse de perturbation incidente et la déformation du choc sont respectivement de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{w}_i = w_i e^{j k \eta_i} = w_i e^{j(k_{\bar{x}} \bar{x} + k_{\bar{y}} \bar{y})} \\ \bar{\varepsilon} = \varepsilon e^{j k \eta_i} = \varepsilon e^{j k_{\bar{y}} \bar{y}} \end{array} \right. \quad (3-3-22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_i = w_{i1} + j w_{i2} \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + j \varepsilon_2 \\ k \eta_i = k \eta = k_{\bar{y}} \bar{y} \end{array} \right. \quad (3-3-23)$$

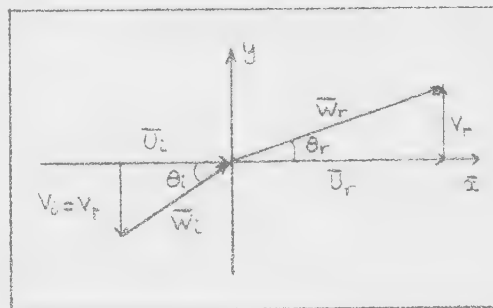
Les valeurs de dH et dS dans le cas d'une onde de cisaillement sont données par

$$\begin{cases} \partial s = A_4 \frac{\omega_i}{U_c} \\ \partial H = \frac{U_c U_c}{\cos \theta_i} \frac{\omega_i}{U_c} \end{cases} \quad (3-3-24)$$

Les grandeurs derrière le choc s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a) \quad \frac{u_r}{U_c} = A_1 \left[\left(\frac{\omega_{i1}}{U_c} \cos \theta_i - \frac{k \sin \theta_r \varepsilon_2}{\beta \delta} \right) + j \left(\frac{\omega_{i2}}{U_c} \cos \theta_i - \frac{k \cos \theta_r \varepsilon_1}{\delta} \right) \right] e^{j k \eta} \\ b) \quad \frac{v_r}{U_c} = \left[\left(\frac{\omega_{i1}}{U_c} \cos \theta_i - \frac{k \cos \theta_r \varepsilon_2}{\delta} \right) + j \left(\frac{\omega_{i2}}{U_c} \sin \theta_i - \frac{k \sin \theta_r \varepsilon_1}{\delta} \right) \right] e^{j k \eta} \\ c) \quad dS = A_4 \left[\left(\frac{\omega_{i1}}{U_c} \cos \theta_i + \frac{k \sin \theta_r \varepsilon_2}{\beta \delta} \right) + j \left(\frac{\omega_{i2}}{U_c} \cos \theta_i - \frac{k \sin \theta_r \varepsilon_1}{\beta \delta} \right) \right] e^{j k \eta} \\ d) \quad dH = \frac{\bar{U}_i \bar{U}_c}{\cos \theta_i} (\omega_{i1} + j \omega_{i2}) e^{j k \eta} \end{cases} \quad (3-3-25)$$

avec $\beta = \frac{\tan \theta_r}{\tan \theta_i} = \frac{\bar{U}_c}{\bar{U}_r}$



et dans le cas du tube à choc

$$\bar{U}_r = \bar{U}_c \quad \text{d'où} \quad \beta \delta = 1$$

6. Calcul du 2me membre de l'équation différentielle

$$\frac{1}{W} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} - T \frac{\partial S}{\partial \eta} \right)$$

D'après la relation

$$\bar{V}_r = \bar{V}_i = \bar{W} \sin \theta_r$$

on obtient

$$\frac{1}{W} = \frac{\delta \sin \theta_r}{\bar{U}_c \tan \theta_i} = \frac{\sin \theta_r}{\bar{U}_c \tan \theta_i}$$

$$\frac{1}{W} \frac{\partial H}{\partial \eta} = \left[-k \bar{U}_c \frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} \left(\frac{\omega_{i2}}{\bar{U}_c} \right) + j k \bar{U}_c \frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} \left(\frac{\omega_{i1}}{\bar{U}_c} \right) \right] e^{jk\eta}$$

$$\begin{aligned} \frac{T}{W} \frac{\partial S}{\partial \eta} = & k \bar{T} A_4 \left[\left(\frac{\delta}{\bar{U}_c} \cos^2 \theta_i \frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} \left(\frac{\omega_{i2}}{\bar{U}_c} \right) - \frac{k}{\bar{U}_c} \sin \theta_r \cos \theta_r \varepsilon_1 \right) \right. \\ & \left. + j \left(\frac{\delta}{\bar{U}_c} \cos^2 \theta_i \frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} \left(\frac{\omega_{i1}}{\bar{U}_c} \right) + \frac{k}{\bar{U}_c} \sin \theta_r \cos \theta_r \varepsilon_2 \right) \right] e^{jk\eta} \end{aligned}$$

Soit

$$\frac{1}{W} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} - T \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) = \left[\left(h_1 \frac{\omega_{i2}}{\bar{U}_c} - h_2 \varepsilon_1 \right) - j \left(h_1 \frac{\omega_{i1}}{\bar{U}_c} - h_2 \varepsilon_2 \right) \right] e^{jk\eta} \quad (3-3-27)$$

avec :

$$\begin{cases} h_1 = k \frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} \left[\bar{U}_c - \frac{\bar{T} A_4 \delta \cos^2 \theta_i}{\bar{U}_c} \right] \\ h_2 = k \frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} \left[\frac{k \bar{T} A_4}{\bar{U}_c} \sin \theta_i \cos \theta_r \right] \end{cases} \quad (3-3-28)$$

7. Résolution de l'équation différentielle

Suivant l'angle d'incidence θ_i , deux cas se présentent : l'écoulement permanent équivalent peut être subsonique ou supersonique. Il existe un angle critique θ_{cr} pour lequel l'écoulement est **sonique**

$$|\theta_i| < |\theta_{cr}| : \frac{\bar{W}}{a} < 1$$

$$|\theta_i| > |\theta_{cr}| : \frac{\bar{W}}{a} > 1$$

$$0 < |\theta_{cr}| < \frac{\pi}{2}$$

Dans un écoulement bidimensionnel, la rencontre d'une ligne de phase de perturbation élémentaire et du choc engendre une onde sonore cylindrique de phase donnée. Celle-ci se propage à la vitesse locale du son et est entraînée à la vitesse de l'écoulement derrière le choc.

7.1. Cas supersonique

On voit que pour $\frac{\bar{W}}{a} > 1$ les ondes cylindriques sonores admettent une enveloppe qui est une onde plane se propageant à la vitesse locale du son.

$$\text{Posons } \frac{\bar{W}^2}{a^2} - 1 = c^2$$

L'équation différentielle générale de l'écoulement s'écrit :

$$-c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \left[(h_1 \frac{\omega_{v2}}{U_c} + h_2 \varepsilon_1) - j (h_1 \frac{\omega_{v1}}{U_c} - h_2 \varepsilon_2) \right] e^{jk\eta} \quad (3-3-29)$$

La solution générale de cette équation différentielle est la somme des solutions particulière et complémentaire

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

ψ_1 = solution particulière vérifiant le 2eme membre de l'équation : elle correspond à un champ de vitesse rotationnelle non isentropique (onde de vitesse de cisaillement + onde d'entropie).

ψ_2 = solution complémentaire vérifiant $-c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0$
elle correspond à un champ d'écoulement irrotationnel isentropique compressible (onde de pression).

ψ_2 est de la forme $f_1(\xi + c\eta) + f_2(\xi - c\eta)$

Seules les ondes qui s'éloignent du choc sont à retenir physiquement d'où

$$\psi_2 = (g_1 + jg_2) e^{j\alpha_0(\xi + c\eta)}$$

La constante arbitraire α_0 est déterminée par les conditions limites au choc

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \xi \cos \theta - \eta \sin \theta & \text{d'où} \quad \bar{x} = 0 &\implies \xi = \eta \tan \theta \\ & & \text{et} \quad e^{j\alpha_0(\xi + c\eta)} &= e^{jk\eta} \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \alpha_0(\eta \tan \theta + c\eta) = k\eta \quad \alpha_0 = \frac{k}{\tan \theta + c}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{1}{k^2} \left[\frac{\omega_{i2}}{U_c} h_1 + \varepsilon_1 h_2 - j \left(\frac{\omega_{i1}}{U_c} h_1 - \varepsilon_2 h_2 \right) \right] e^{jk\eta} \\ \psi_2 = (g_1 + jg_2) e^{j\alpha_0(\xi + c\eta)} \end{cases} \quad (3-3-30)$$

En appliquant la relation

$$\begin{cases} u' = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \\ v' = -\left(1 - \frac{W^2}{a^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} u' = -\frac{j}{k} \left[\frac{\omega_{i2}}{U_c} h_1 + \varepsilon_1 h_2 - j \left(\frac{\omega_{i1}}{U_c} h_1 - \varepsilon_2 h_2 \right) \right] e^{jk\eta} + j\alpha_0 c (g_1 + jg_2) e^{j\alpha_0(\xi + c\eta)} \\ v' = j\alpha_0 c^2 (g_1 + jg_2) e^{j\alpha_0(\xi + c\eta)} \end{cases} \quad (3-3-31)$$

En utilisant la rotation d'angle θ

$$\begin{cases} \xi = \bar{x} \cos \theta + \bar{y} \sin \theta \\ \eta = -\bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta \end{cases}$$

a) Considérons la première composante de u'

$$e^{jk\eta} = e^{jk(-\bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta)} = e^{jk \cos \theta (\bar{y} - \bar{x} \tan \theta)}$$

Comme $k \cos \theta = k_{\bar{y}}$, $e^{jk\eta} = e^{jk_{\bar{y}} (\bar{y} - \bar{x} \tan \theta)}$ (3-3-32)

ce qui représente la composante suivant la droite faisant l'angle θ avec l'axe des $\bar{x}$, donc suivant la vitesse $\bar{W}$. Cette composante correspond donc à une onde de cisaillement de vitesse u'_s .

b) Considérons la deuxième composante

$$\begin{aligned} j\alpha_0(\xi + c\eta) &= j\alpha_0 [\bar{x} \cos \theta + \bar{y} \sin \theta + c(-\bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta)] \\ &= j\alpha_0 (\sin \theta + c \cos \theta) \left[\bar{y} - \frac{c \sin \theta + \cos \theta}{c \cos \theta + \sin \theta} \bar{x} \right] \end{aligned}$$

en remplaçant α_0 par sa valeur

$$\begin{aligned} j\alpha_0(\xi + c\eta) &= jk_{\bar{y}} \left[\bar{y} - \frac{c \sin \theta + \cos \theta}{c \cos \theta + \sin \theta} \bar{x} \right] \\ &= jk_{\bar{y}} [\bar{y} - \tan \theta' \bar{x}] \end{aligned} \quad (3-3-33)$$

avec $\tan \theta' = \frac{c - \cot \theta}{1 + \cot \theta}$

On calcule que $\theta - \theta' = \mu$ avec $\frac{1}{\sin \mu} = \frac{W}{a}$

L'onde se déplaçant dans la direction est une onde longitudinale de pression possédant la vitesse locale de son a .

On obtient ainsi

$$\begin{cases} u' = u'_s + u'_p \\ v' = v'_p \end{cases} \quad (3-3-35)$$

avec

$$\begin{cases} u'_s = z e^{jk\eta} = z e^{jk\bar{y}(\bar{y}-\bar{x}t_3\theta)} \\ u'_p = j\omega_0 c (g_1 + jg_2) e^{j\omega_0(\xi + c\eta)} = j\omega_0 c g e^{jk\bar{y}(\bar{y}-\bar{x}t_3\theta)} \\ v'_p = j\omega_0 c^2 (g_1 + jg_2) e^{j\omega_0(\xi + c\eta)} = j\omega_0 c g e^{jk\bar{y}(\bar{y}-\bar{x}t_3\theta)} \end{cases} \quad (3-3-36)$$

$$z = \frac{1}{k} \left[\left(\frac{\omega_{i1}}{v_c} h_1 - \varepsilon_2 h_2 \right) + j \left(\frac{\omega_{i2}}{v_c} h_1 - \varepsilon_1 h_2 \right) \right] \quad (3-3-37)$$

Les composantes (u,v) dans les axes ($\bar{x}, \bar{y}$) s'expriment en fonction de u' et v' composantes dans les axes (ξ, η) par la rotation d'angle θ

$$\begin{cases} u = u' \cos \theta - v' \sin \theta \\ v = u' \sin \theta + v' \cos \theta \end{cases} \quad (3-3-38)$$

Les relations (3-38) (3-37) (3-36) (3-35) avec les relations (3-25 (a) (b)) établissent un système de deux équations à deux inconnues ε et g que l'on peut résoudre.

Les amplitudes des ondes de cisaillement réfractées; de pression, d'entropie et de déformation du choc, sont trouvées comme étant alors des fonctions linéaires de l'amplitude de l'onde de cisaillement incidente.

La résolution de ce système d'équations nous donne :

$$a) \quad \begin{cases} \varphi_c = \varphi_0 + \frac{\Pi}{2} \\ \varphi_p = \varphi_c \\ \varphi_s = \varphi_0 \end{cases} \quad (3-3-39)$$

φ_0 angle de phase de l'onde incidente = $\arctg \frac{\omega_{i2}}{\omega_{i1}}$

φ_c angle de phase de l'onde de déformation du choc

φ_p angle de phase de l'onde de pression

φ_s angle de phase de l'onde de cisaillement réfractée.

b) En utilisant un changement d'axe suivant l'écoulement $\bar{W}$

$$\begin{cases} \xi_0 = \xi - \bar{W}t \\ \eta_0 = \eta \end{cases}$$

nous trouvons que la vitesse de propagation de l'onde de pression est égale à la célérité du son dans le milieu derrière le choc.

Cette onde de pression sonore plane peut être décomposée en série de Fourier :

$$e^{jk_p \cdot r} = J_0(k_p \cdot r) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} j^m \cdot J_m(k_p \cdot r) \cdot \cos m\varphi_z \quad (3-3-40)$$

l'axe $O\xi$ faisant avec l'axe $O\xi$ l'angle de Mach μ

$$\varphi_z = \widehat{O\xi, Or}$$

$$k_p = \alpha_0 \sqrt{1+c^2} = \frac{\alpha_0}{\sin \mu}$$

Le calcul numérique fait en fonction de θ nous donne les amplitudes :

des ondes de cisaillement

des ondes de pression

des ondes d'entropie

des ondes de déformation du choc

du niveau sonore

pour des rapports de pression initiale (engendrant l'onde de choc) $\frac{p_H}{p_B}$ choisis :

$$\frac{p_H}{p_B} = 3,6 ; 40 ; 500 ; \infty .$$

7.2. Cas subsonique

On voit que pour $\frac{\bar{W}}{a} < 1$ les ondes sonores cylindriques n'admettent plus d'enveloppe.

Posons $1 - \frac{\bar{W}^2}{a^2} = c^2$

La solution particulière est donnée par la relation (29).

La solution complémentaire peut être considérée comme une onde s'amortissant exponentiellement avec la distance au choc $\bar{x} = \xi \cos \theta - \eta \sin \theta$

se met alors sous la forme suivante :

$$\psi_2 = (\pi_1 + j \pi_2) e^{-l_1 (\xi \cos \theta - \eta \sin \theta) + j (l_2 \xi + l_3 \eta)} \quad (3-3-41)$$

La constante arbitraire α_0 est déterminée par les conditions limites au choc comme pour le cas supersonique

$$\alpha_0 = \frac{k \cos \theta}{\sin \theta + c \cos \theta} \quad (3-3-42)$$

et

$$\begin{cases} l_1 &= \alpha_0 c \\ l_2 &= \alpha_0 \sin \theta \\ l_3 &= \alpha_0 c^2 \cos \theta \end{cases} \quad (3-3-43)$$

comme dans le cas supersonique on obtient :

$$\begin{cases} u'_s &= Z e^{jk\eta} \\ u'_p &= \pi_u e^{-\alpha_0 c (\xi \cos \theta - \eta \sin \theta) + j \alpha_0 (\xi \sin \theta + c^2 \eta \cos \theta)} \\ v'_p &= \pi_v e^{-\alpha_0 c (\xi \cos \theta - \eta \sin \theta) + j \alpha_0 (\xi \sin \theta + c^2 \eta \cos \theta)} \end{cases} \quad (3-3-44)$$

avec π_u = constante d'intégration

$$\begin{cases} \pi_u &= \pi_1 + j \pi_2 \\ \pi_v &= j c \pi_u \end{cases}$$

De même que dans le cas précédent, on établit un système de deux équations à deux inconnues (ξ et π_u) que l'on peut résoudre.

On obtient ainsi :

a) Les angles de phase φ_c , φ_p , φ_s , les amplitudes des différentes ondes derrière le choc, l'amplitude de la déformation du choc en fonction de θ .

Ces valeurs sont calculées numériquement comme dans le cas précédent de l'écoulement supersonique.

b) Le même changement d'axe que celui du cas précédent nous donne pour l'onde de pression :

$$u'_p = \pi_u e^{-d + j(k_z \cdot \xi + \omega t)} \quad (3-3-45)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} d &= -\alpha_0 c (\xi_0 \cos \theta - \eta_0 \sin \theta + \bar{w} t) \\ k_z &= \alpha_0 \sqrt{\sin^2 \theta + c^4 \cos^2 \theta} \\ \omega &= \alpha_0 \bar{w} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (3-3-46)$$

la vitesse de propagation de l'onde plane de pression est égale :

$$\frac{\omega}{k_p} = \frac{\sqrt{1-c^2} \cdot \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + c^4 \cos^2 \theta}} \cdot a \neq a \quad (3-3-47)$$

L'onde de pression ne se propage pas à la vitesse du son. Cependant nous pouvons admettre que cette onde plane amortie est décomposable, en série de Fourier, sur tous les nombres d'ondes, en ondes acoustiques cylindriques amorties.

8. Recomposition du champ derrière le choc

On obtient géométriquement

$$\frac{k_r}{k_r} = \frac{r_r}{r_i} = \frac{dk_r}{dk_r} = \frac{\cos \theta_r}{\cos \theta_i} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\beta^2 + \tan^2 \theta_r}{1 + \tan^2 \theta_r} \right] = \bar{\sigma}_r(\theta_r) \quad (3-3-4)$$

$$\frac{k_r}{k_p} = \frac{r_p}{r_i} = \frac{dk_r}{dk_p} = \frac{\cos \theta_p}{\cos \theta_i} = \frac{\sin \theta_r + c_0}{\beta \cos \theta_r} \left[\frac{\beta^2 + \tan^2 \theta_r}{1 + \tan^2 \theta_r} \right] = \bar{\sigma}_p(\theta_r) \quad (3-3-49)$$

$$c_0 = \left[|\cos^2 \theta_{cr}| - |\cos^2 \theta_{ri}| \right]^{\frac{1}{2}}$$

d'autre part

$$d\alpha_i = \frac{d\alpha_i}{d\theta_i} \frac{d\theta_i}{d\theta_r} d\theta_r = -\beta \frac{1 + \tan^2 \theta_r}{\beta^2 + \tan^2 \theta_r} d\theta_r = \bar{\eta}(\theta_r) d\theta_r \quad (3-3-50)$$

d'où

$$\begin{cases} dk_r d\alpha_i = \bar{\sigma}_r \bar{\eta} dk_r d\theta_r \\ \bar{\sigma}_r \bar{\eta} = - \left[\frac{1 + \tan^2 \theta_r}{\beta^2 + \tan^2 \theta_r} \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} dk_p d\alpha_i = \bar{\sigma}_p \bar{\eta} dk_r d\theta_r \\ \bar{\sigma}_p \bar{\eta} = - \frac{\sin \theta_r + c_0}{\cos \theta_r} \left[\frac{1 + \tan^2 \theta_r}{\beta^2 + \tan^2 \theta_r} \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

En intégrant sur θ_r et k_r ou k_p

$$\Delta s = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\infty e^{-4t(\bar{\sigma}_r k_r)^2} \sin(k_r \hat{r}_r) dk_r \right] \frac{\Gamma}{4\pi^2} \frac{\partial s}{\partial c} (\bar{\sigma}_r \bar{\eta}) d\theta_r \quad (3-3-51)$$

$$\Delta x = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\infty e^{-4t(\bar{\sigma}_r k_r)^2} \sin(k_r \hat{r}_r) dk_r \right] \frac{\Gamma}{4\pi^2} \frac{\varepsilon}{\partial c} (\bar{\eta}) d\theta_r \quad (3-3-52)$$

$$\Delta p = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\infty e^{-4t(\bar{\sigma}_p k_p)^2} \sin(k_p \hat{r}_p) dk_p \right] \frac{\Gamma}{4\pi^2} \frac{\bar{p}}{\partial c} \left(\frac{p}{\bar{p}} \right) (\bar{\sigma}_p \bar{\eta}) d\theta_r \quad (3-3-53)$$

On trouve des intégrales de la forme

$$G_1(\lambda, \tau) = \int_0^{\infty} e^{-\tau x^2} \sin \lambda x \, dx \quad \text{pour les ondes} \quad (3-3-54)$$

$$G_2(\lambda, \tau) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau x^2}}{x} \sin \lambda x \, dx \quad \text{pour la déformation du choc} \quad (3-3-55)$$

Les tables des intégrales limites donnent

$$G_1(\lambda, \tau) = \frac{1}{8\tau} \int_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{\tau}}} e^{-(t^2 + \frac{\lambda^2}{4})} dt \quad (3-3-56)$$

$$G_2(\lambda, \tau) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{\tau}}} e^{-t^2} dt \quad (3-3-57)$$

On obtient finalement :

pour le champ d'entropie

$$\Delta s = -\frac{\Gamma}{\pi^2 \bar{U}_c} \left[\int_0^{\theta_{cr}} (\bar{\sigma}_r \bar{y}) \, ds \cdot G_1(\lambda, \tau) \, d\theta_r + \int_{\theta_{cr}}^{\frac{\pi}{2}} (\bar{\sigma}_r \bar{y}) \, ds \cdot G_1(\lambda, \tau) \, d\theta_r \right] \quad (3-3-58)$$

pour la déformation du choc

$$\Delta x = -\frac{\Gamma}{\pi^2 \bar{U}_c} \left[\int_0^{\theta_{cr}} \varepsilon_{sub} \cdot \bar{y} \cdot G_2(\lambda, \tau) \, d\theta_r + \int_{\theta_{cr}}^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_{sup} \cdot \bar{y} \cdot G_2(\lambda, \tau) \, d\theta_r \right] \quad (3-3-59)$$

pour le champ de pression

$$\Delta p = -\frac{\Gamma \bar{p}}{\pi^2 \bar{U}_c} \int_{\theta_{cr}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{p}{\bar{p}} \right) (\bar{\sigma}_p \bar{y}) \cdot G_1(\lambda, \tau) \, d\theta_r \quad (3-3-60)$$

Les résultats numériques ainsi obtenus pourront être comparés aux résultats expérimentaux.

On remarque que la méthode d'analyse proposée utilise un profil des vitesses du champ du tourbillon ne présentant pas de discontinuité. On simplifie le calcul de H.S. RIBNER qui utilise un profil approché discontinu.

4. ETUDE DETAILLEE

4.1. ACTION D'UN CHAMP ACOUSTIQUE SUR L'ECOULEMENT DU JET

Les conditions de l'écoulement d'un jet sont étroitement régies par le rapport des pressions amont et aval.

Si le champ ambiant subit de petites variations périodiques de pression, l'angle de détente ainsi que la vitesse du jet sont soumis à une variation de même période. On peut analyser l'effet de ces variations à l'orifice de sortie de la tuyère sur l'origine du jet, et en particulier la création d'une vitesse de perturbation initiale.

4.1.1. Détente autour d'un angle

Un jet s'écoulant dans un milieu extérieur au repos subit une détente sur les bords de la tuyère. Considérons un gaz réel compressible s'écoulant parallèlement à un demi-plan OA (Fig. 4-1). Un courant uniforme sonique s'écoule parallèlement à la frontière solide OA, et restera uniforme jusqu'à la ligne de Mach OB. Si nous supposons que les variables d'état et de mouvement restent constantes le long des demi-droites issues de O, nous pouvons utiliser les coordonnées polaires d'origine O : (r, θ) .

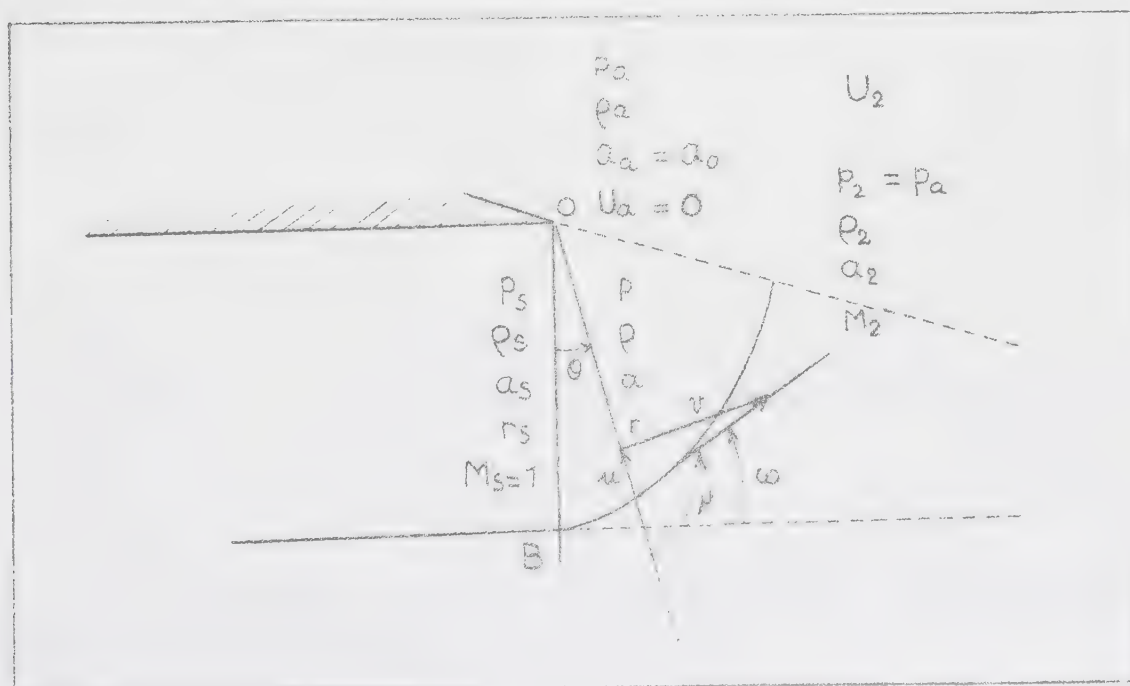


Fig. 4-1

Soient

{	r	la pression	
	ρ	la masse spécifique	
	a	la vitesse du son	
{	u	composantes de la vitesse	transversales
	v		radiales

Toutes ces valeurs sont indépendantes de r et fonction de θ seul.

En écrivant les équations fondamentales de continuité et de quantité de mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u + \frac{d}{d\theta} \rho v = 0 \\ \frac{v}{r} \frac{du}{d\theta} - \frac{v^2}{r} = 0 \\ \frac{v}{r} \frac{dv}{d\theta} - \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{dp}{d\theta} = \frac{a^2}{\rho r} \frac{dp}{d\theta} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4-1-1) \\ (4-1-2) \\ (4-1-3) \end{array}$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u + \frac{dv}{d\theta} = \frac{v}{\rho} \frac{dp}{d\theta} \\ u + \frac{dv}{d\theta} = \frac{a^2}{\rho r} \frac{dp}{d\theta} \\ v = \frac{du}{d\theta} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4-1-1)' \\ (4-1-2)' \\ (4-1-3)' \end{array}$$

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} u + \frac{dv}{d\theta} = 0 \quad \frac{dp}{d\theta} = 0 \\ v^2 = a^2 \end{array} \right.$$

La première condition impliquant $\rho = \text{Cte}$, ce qui est contraire aux hypothèses, on a donc :

$$v = \pm a \quad (4-1-4)$$

Soit U la vitesse maximum atteinte par l'écoulement après la détente.

L'équation de la conservation de l'énergie s'écrit :

$$U = \frac{2}{\gamma-1} a^2 + (u^2 + v^2) \quad (4-1-5)$$

d'après (4-4)

$$U^2 = u^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} v^2 \quad (4-1-6)$$

Posons $u = U \sin \alpha$
 $v = \lambda U \cos \alpha$ avec $\begin{cases} \alpha = \text{angle auxiliaire} \\ \lambda^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \end{cases}$

d'après (4-2') $v = \frac{du}{d\theta}$ d'où $\lambda U \cos \alpha = U \cos \frac{d\alpha}{d\theta}$ (4-1-7)

Soit $\frac{d\alpha}{d\theta} = \lambda$

En choisissant pour $(\theta = 0 \quad \alpha = 0)$

$$\alpha = \lambda \theta \quad (4-1-8)$$

En posant $\operatorname{tg} \mu = \frac{v}{u}$, on obtient :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \lambda \theta = \lambda \cotg \mu \quad (4-1-9)$$

Ces résultats lient l'angle θ avec les angles μ et α

Les variables d'état p, ρ, a , sont déterminées par μ

Les variables cinématiques (u, v) sont déterminées par θ en utilisant α

On obtient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{a}{a_s} = \cos \lambda \theta & (a) \\ \frac{\rho}{\rho_s} = \cos \lambda \theta^{2\theta} & (b) \\ \frac{p}{p_s} = \cos \lambda \theta^{2(\theta+1)} & (c) \end{array} \right. \quad (4-1-10)$$

$$M = \frac{U}{a_s} = \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{tg}^2 \lambda \theta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (d)$$

avec
$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{\gamma-1} \\ \lambda^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \end{cases}$$

L'écoulement sonique à la sortie

a été obtenu avec les conditions génératrices

la détente s'effectue dans le milieu extérieur

La vitesse obtenue après la détente étant alors

$$: p_s, \rho_s, a_s, T_s, U_s = \dots$$

$$: p_o, \rho_o, a_o, T_o, U_o = 0$$

$$: p_a, \rho_a, a_a = a_o, T_a = T_o$$

$$: U$$

4.1.2. Vitesse après la détente

La vitesse U est calculée en fonction du rapport entre les pressions réservoir et extérieure : $\frac{p_o}{p_a}$

$$\begin{cases} \left(\frac{p_o}{p_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \\ M^2 = \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{p_o}{p_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \\ a_s = a_o \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

d'où
$$U = a_o \left\{ \frac{2}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_o}{p_a}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$U = a_o \sqrt{5} [1 - P]^{\frac{1}{2}} \quad (4-1-11)$$

avec

$$P = \left(\frac{p_o}{p_a}\right)^{-\frac{2}{\gamma}} \quad \text{pour} \quad \gamma = 1,4$$

4.1.3. Angle de détente

Soit ω l'angle que font les directions des vitesses après et avant la détente :

$$\omega = \mu + \theta - \frac{\pi}{2}$$

avec
$$\begin{cases} \sin \mu = \frac{1}{M} \\ \cos \lambda \theta = \left(\frac{6P}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$M = \frac{5(1-6P)}{P}$$

$$\mu = \arcsin \frac{P}{5(1-P)}$$

$$\theta = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{\frac{1}{2}} \arccos \left(\frac{6P}{5} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6} \arccos \left(\frac{6P}{5} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega = \sqrt{6} \arccos \sqrt{\frac{6P}{5}} + \arcsin \sqrt{\frac{P}{5(1-P)}} - \frac{\pi}{2} \quad (4-1-12)$$

4.1.4. Perturbation de vitesse

Si la pression P_a du milieu de détente varie périodiquement avec le temps à l'orifice de sortie :

$$dp_a = \pi_a e^{j\omega t}$$

il en résultera des variations périodiques de la vitesse U et de l'angle de détente ω

$$dv = - \frac{a_o \sqrt{5}}{7} \frac{P}{[1-P]^{\frac{1}{2}}} \frac{\pi_a}{p_a} e^{j\omega t} \quad (4-1-13)$$

$$d = - \frac{1}{7} \left[\frac{P(5-6P)}{1-P} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\pi_a}{p_a} e^{j\omega t}$$

Les variations longitudinales et transversales de la vitesse sont alors :

$$u = dU$$

$$v = U d\omega$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} u = - \frac{a_o \sqrt{5}}{7} \frac{P}{\sqrt{1-P}} \frac{\pi_a}{p_a} e^{j\omega t} \quad (a) \\ v = - \frac{a_o \sqrt{5}}{7} \sqrt{\frac{P(5-6P)}{1-P}} \frac{\pi_a}{p_a} e^{j\omega t} \quad (b) \end{array} \right. \quad (4-1-14)$$

4.2. PROPAGATION D'UNE PERTURBATION INITIALE DE PRESSION

4.2.1. Méthode de transformation

Nous utilisons la méthode de transformation de Fourier - Laplace sur t et x_1 :

$$F(\omega, k, x_2) = \int_0^{\infty} e^{jkx_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t, x_1, x_2) dt dx_1 \quad (4-2-1)$$

En effet nous supposons qu'il ne se passe rien pour $x_1 < 0$ (en amont de la sortie de la tuyère), et que l'on considère la solution lorsqu'un temps très long s'est écoulé depuis que le début de la perturbation de pression extérieure a atteint l'orifice de sortie de la tuyère.

Soit

$$\Phi(\omega, k; x_2, x_3) = F(\omega, k; x_2) \varphi(x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \int_0^{\infty} e^{jkx_1} f(t, x_1, x_2, x_3) dx_1 dt \quad (4-2-2)$$

Avec

$$\varphi(x_3) = \begin{cases} \delta|x_3 - l| \\ e^{jmx_3} \end{cases} \quad (4-2-3)$$

1.1 Transformation de ∇^2

$$\nabla^2 = \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} & \text{coordonnées cartésiennes} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} & \text{coordonnées cylindriques} \end{cases}$$

$$\{\nabla^2 f\} = \begin{cases} -k^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \\ -k^2 \Phi + \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{1}{x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right] + \frac{1}{x_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \end{cases}$$

$$\{\nabla^2 f\} = \begin{cases} \psi(x_3) \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} - k^2 F \right] & (a) \\ \varphi(x_3) \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{1}{x_2} \frac{\partial F}{\partial x_2} - \left(\frac{1}{x_1^2} - k^2 \right) F \right] & (b) \end{cases} \quad (4-2-4)$$

1.2. Transformation de $\frac{D^2}{Dt^2}$

$$\frac{D^2}{Dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial}{\partial x_1 \partial t} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$$

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \int_0^{\infty} e^{jkx_1} f(x, t) dx_1 dt$$

$$a) \int_0^{\infty} e^{jkx_1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt \right] dx_1 = -\omega^2 F + \int_0^{\infty} e^{jkx_1} \left[e^{-j\omega t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + j\omega f \right) \right]_0^{\infty} dx_1$$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_0^{\infty} e^{jkx_1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1 \right] dt = -k^2 F + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[e^{jkx_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - jkf \right) \right]_{-\infty}^{\infty} dt$$

$$c) \int_0^{\infty} e^{jkx_1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) dt \right] dx_1 = \omega k F + j\omega \left[e^{jkx_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f dt \right]_0^{\infty} \\ - \int_0^{\infty} e^{jkx_1} \left[e^{-j\omega t} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right]_{-\infty}^{\infty} dx_1 \quad (4-2-5)$$

$$d) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_0^{\infty} e^{jkx_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) dx_1 \right] dt = \omega k F - ik \left[e^{-j\omega t} \int_0^{\infty} e^{jkx_1} f dx_1 \right]_{-\infty}^{\infty} \\ + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[e^{jkx_1} \frac{\partial f}{\partial t} \right]_0^{\infty} dt$$

$$\left\{ \frac{D^2 f}{Dt^2} \right\} = -(\omega - Uk)^2 F + \int_0^{\infty} e^{jkx_1} \left[e^{-j\omega t} \left(\frac{Df}{Dt} + j\omega f \right) \right]_{-\infty}^{\infty} dx_1 \\ + U \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[e^{jkx_1} \left(\frac{Df}{Dt} - jkf \right) \right]_0^{\infty} dt \quad (4-2-6)$$

$$+ jU \left[\left(e^{jkx_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \omega f dt \right)_0^{\infty} - \left(e^{-j\omega t} \int_0^{\infty} e^{jkx_1} k f dx_1 \right)_{-\infty}^{\infty} \right]$$

1.3. Nous avons à calculer $\{ \nabla^2 p \}$ $\left\{ \frac{D^2 p}{Dt^2} \right\}$ $\left\{ \frac{D^2 n}{Dt^2} \right\}$

Les conditions initiales étant:

$$\begin{cases} p = \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 & \text{pour } x_1 \leq 0 & (a) \\ n_0 = n(0, t) = 0 & & (b) \\ \frac{\partial n}{\partial x_1} = \dot{n}(0, t) = \theta e^{j\omega t} & \text{pour } x_1 = 0 & (c) \end{cases} \quad (4-2-7)$$

Les conditions limites à l'infini étant:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |p| < \infty \quad (4-2-8)$$

On obtient ainsi:

$$\{ \nabla^2 p \} = \begin{cases} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} - k^2 p \right] \delta(x_1 - 0) & (a) \\ \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{1}{x_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} - \left(\frac{m^2}{x_1^2} + k^2 \right) p \right] e^{jm x_1} & (b) \end{cases} \quad (4-2-9)$$

D'autre part on définit les transformées de Fourier

$$N_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} n(0,t) dt$$

transformée de Fourier du déplacement
à la sortie de la tuyère.

(4-2-10)

$$V_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\frac{\partial}{\partial t} n(0,t) + U \frac{\partial}{\partial x_1} n(0,t) \right] dt$$

transformée de Fourier de la
vitesse transversale impartie
à l'orifice de sortie de la
tuyère.

(4-2-11)

D'après les conditions initiales on voit que l'on a :

$$\begin{cases} N_0(\omega) = 0 & (a) \\ V_0(\omega) = 2\pi U \Theta \delta(\omega - \alpha) & (b) \end{cases}$$

(4-2-12)

On obtient alors :

$$\left\{ \frac{D^2 n}{Dt^2} \right\} = [S^2 N - U V_0(\omega)] \varphi(x_3)$$

(4-2-13)

$$\left\{ \frac{D^2 p}{Dt^2} \right\} = [S^2 P] \varphi(x_3)$$

(4-2-14)

en posant $S = j(\omega - Uk)$ (4-2-15)

1.4. Transformée de $A f(x_1) e^{j\alpha t} \cdot \varphi(x_3)$

$$\begin{aligned} \{A f(x_1) e^{j\alpha t}\} &= A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{j\alpha t} \left[\int_0^{\infty} f(x_1) e^{jkx_1} dx_1 \right] dt \\ &= 2\pi A \mathcal{L}[f(x_1)] \delta(\omega - \alpha) \\ &= 2\pi A F(k) \delta(\omega - \alpha) \end{aligned}$$

(4-2-16)

4.2.2. Problème transformé

2.1. Equation d'onde

2.1.1. Transformé de l'équation (3-2-1)

Soumise aux conditions initiales (3-2-6)

et aux conditions limites (3-2-2) à (3-2-5)

$$\left\{ \begin{array}{l} S^2 P = a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} - a^2 k^2 P \quad (a) \\ S^2 P = a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} + \frac{a^2}{x_2} \frac{\partial P}{\partial x_2} - a^2 \left(\frac{m^2}{x_2^2} + k^2 \right) P \quad (b) \end{array} \right. \quad (4-2-17)$$

En posant :

$$\mu^2 = k^2 + \frac{S^2}{a^2} \quad (4-2-18)$$

$$y = i\mu x_2 \quad (4-2-19)$$

on obtient les équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{l} P'' + P = 0 \\ P'' + \frac{1}{y} P' + \left(1 - \frac{m^2}{y^2} \right) P = 0 \end{array} \right. = 0 \quad (4-2-20)$$

les indices ' et '' indiquant les dérivées 1ère et 2èmes par rapport à y.

2.1.2. Solution des équations

a) Ecoulement plan

$$P'' + P = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} P_- = C_{1-} e^{iy_-} + C_{2-} e^{-iy_-} \\ P_+ = C_{1+} e^{iy_+} + C_{2+} e^{-iy_+} \end{array} \right. \quad (4-2-21)$$

Or quand $|x_2| \rightarrow \infty$ $y \rightarrow j\infty$
 et comme $|p_+| < +\infty$ on a donc $C_{2+} = 0$.

On a vu que deux cas étaient à considérer :

$$\begin{cases} \text{le cas symétrique} & (\frac{\partial p}{\partial x_2})_{x_2=0} = 0 \\ \text{le cas antisymétrique} & p_{x_2=0} = 0 \end{cases}$$

On a alors $C_{2-} = \pm C_{1-} = \pm C_-$

La solution dans le cas de l'écoulement plan est de la forme :

Cas symétrique

$$\begin{cases} P_-(y_-) = C_- [e^{j|y_-|} + e^{-j|y_-|}] \\ P_+(y_+) = C_+ e^{j|y_+|} \end{cases}$$

Cas antisymétrique

$$\begin{cases} P_-(y_-) = \pm C_- [e^{j|y_-|} - e^{-j|y_-|}] \\ P_+(y_+) = \pm C_+ e^{j|y_+|} \end{cases}$$

(4-2-23)

b) Ecoulement cylindrique

Solution de l'équation de Bessel (m entier)

$$P'' + \frac{1}{y} P' + (1 - \frac{m^2}{y^2}) P = 0$$

$$\begin{cases} P_-(y_-) = C_1 J_m(y_-) + C_2 N_m(y_-) \\ P_+(y_+) = C_1 J_m(y_+) + C_2 N_m(y_+) \end{cases}$$

(4-2-24)

Les conditions aux limites entraînent

$$C_2 = 0 \quad [P_-(y_-) \text{ reste borné à l'origine } y = 0]$$

$$C_2 = j C_1 \quad [P_+(y_+) \text{ tend vers } 0 \text{ pour } y \rightarrow \infty]$$

d'où

$$\begin{cases} P_-(y_-) = C_- J_m(y_-) \\ P_+(y_+) = C_+ H_m^0(y_+) = C_+ [J_m(y_+) + j N_m(y_+)] \end{cases} \quad (4-2-19)$$

La solution générale s'écrit donc sous la forme

$$\begin{cases} P_-(y_-) = C_- G_-(y_-) \\ P_+(y_+) = C_+ G_+(y_+) \end{cases} \quad (4-2-20)$$

2.2. Conditions à la couche mince

Les conditions aux limites (3-3) et (3-2) d'après les conditions

(3-4) (3-5) et 3-6) s'écrivent :

$$\begin{cases} P_-(H_-) = P_+(H_+) + A & (a) \\ \frac{1}{\rho_-} \left[\frac{\partial}{\partial y_-} P_-(y_-) \right]_{y_-=H_-} = S_-^2 N_- U_- V_0(\omega) & (b) \\ \frac{1}{\rho_+} \left[\frac{\partial}{\partial y_+} P_+(y_+) \right]_{y_+=H_+} = S_+^2 N_+ U_+ V_0(\omega) & (c) \end{cases} \quad (4-2-27)$$

2.3. Solution du problème transformé

Les deux dernières conditions s'écrivent :

$$-\frac{1}{h} \frac{H}{\rho} \frac{\partial P}{\partial H} = j (\omega - U k)^2 N - U V_0(\omega) \quad (4-2-28)$$

Posons

$$\begin{cases} \Omega = \frac{\omega h}{a_+} \\ \lambda = k h \end{cases} \quad (4-2-29)$$

Soit

$$\begin{cases} \Omega_+ = \frac{\omega h}{a_+} - \frac{U_+}{a_+} k h = \left[\Omega - \frac{U_+}{a_+} \lambda \right] \\ \Omega_- = \frac{\omega h}{a_-} - \frac{U_-}{a_-} k h = \frac{a_+}{a_-} \left[\Omega - \frac{U_+}{a_+} \lambda \right] \end{cases} \quad (4-2-30)$$

La condition (4-2-28) s'écrit alors

$$h C H G'(H) = \rho a^2 \left[\Omega^2 - h^2 \frac{U}{a^2} V_0(\omega) \right] \quad (4-2-31)$$

Comme dans le cas des jets

$$\rho_+ a_+^2 = \rho_- a_-^2 = \rho \quad (4-2-32)$$

$$\rho \Omega^2 N = h \left[C H G'(H) - \rho h \frac{U}{a^2} V_0(\omega) \right] \quad (4-2-33)$$

En éliminant N on obtient alors

$$\frac{\Omega_+^2}{\Omega_-^2} = \frac{C_+ H_+ G'_+(H_+) - \rho h \frac{U_+^2}{a_+^2} V_0}{C_- H_- G'_-(H_-) - \rho h \frac{U_-^2}{a_-^2} V_0} \quad (a) \quad (4-2-34)$$

$$C_- G_-(H_-) = C_+ G_+(H_+) + A \quad (b)$$

On peut alors calculer C_- et C_+

$$\frac{C_- H_- G'_-(H_-)}{\Omega_-^2} - \frac{C_+ H_+ G'_+(H_+)}{\Omega_+^2} = \rho h V_0 \left(\frac{U_-}{\Omega_-^2 a_-^2} - \frac{U_+}{\Omega_+^2 a_+^2} \right)$$

$$C_- \left(\frac{H_- G'_-(H_-)}{\Omega_-^2 G_-(H_-)} - \frac{H_+ G'_+(H_+)}{\Omega_+^2 G_+(H_+)} \right) = \rho h V_0 \left(\frac{U_-}{\Omega_-^2 a_-^2} - \frac{U_+}{\Omega_+^2 a_+^2} \right) - A \frac{H_+}{\Omega_+^2} \frac{G'_+(H_+)}{G_+(H_+)} \quad (4-2-35)$$

avec

$$\begin{cases} A = 2\pi A(k) \delta(\omega - \alpha) \\ V_0 = 2\pi \Theta \delta(\omega - \alpha) \end{cases}$$

on obtient donc $P_-(y_-) = C_- G_-(y_-)$

$$P_-(y_-) = 2\pi \frac{\rho h \Theta \left[\frac{U_-}{\Omega_-^2 a_-^2} - \frac{U_+}{\Omega_+^2 a_+^2} \right] - A \left[\frac{H_+}{\Omega_+^2} \frac{G'_+(H_+)}{G_+(H_+)} \right] \delta(\omega - \alpha) G_-(y_-)}{\frac{H_- G'_-(H_-)}{\Omega_-^2 G_-(H_-)} - \frac{H_+ G'_+(H_+)}{\Omega_+^2 G_+(H_+)}} \quad (4-2-36)$$

4.2.3. Solution du problème

3.1. La transformée inverse de Fourier-Laplace donne:

$$p(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} P(\omega, k, y) e^{j(\omega t - k x_1)} d\omega dk \quad (4-2-37)$$

avec :

$$P(\omega, k, y) = F(\omega, k, y) \delta(\omega - \alpha)$$

$$\text{or: } \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, k, y) \delta(\omega - \alpha) d\omega = F(\alpha, k, y)$$

$$p(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty+i\epsilon_1}^{\infty+i\epsilon_1} F(\alpha, k, y) e^{j(\alpha t - k x_1)} dk \quad (4-2-38)$$

3.2. Pour faire apparaître la vitesse complexe de propagation a_+ $\mathbb{C}$ on introduit le changement de variable

$$k = \frac{\alpha}{a_+ c} \quad \text{avec} \quad c^* = \frac{1}{c}$$

$$p(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty+i\epsilon_1}^{\infty+i\epsilon_1} F(\alpha, c^*, y) e^{j\alpha(t - \frac{c^*}{a_+} x_1)} d\alpha \quad (4-2-39)$$

Ce changement de variable entraîne:

$$\Omega = \frac{\alpha}{a_+} = \alpha c \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\alpha}{a_+} \frac{h}{c}$$

d'où

$$\begin{cases} \Omega_+^2 = \lambda^2 \left(c - \frac{U_+}{a_+}\right)^2 = \lambda^2 (\beta_+^2 + 1) \\ \Omega_-^2 = \lambda^2 \frac{a_+^2}{a_-^2} \left(c - \frac{U_-}{a_+}\right)^2 = \lambda^2 (\beta_-^2 - 1) \end{cases} \quad (4-2-40)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_+ = \left| \left(c - \frac{U_+}{a_+} \right)^2 - 1 \right|^{\frac{1}{2}} \\ \beta_- = \frac{a_+}{a_-} \left| \left(c - \frac{U_-}{a_-} \right)^2 - 1 \right|^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (4-2-41)$$

3.3. Détermination des pôles

On doit maintenant intégrer (37) dans le plan complexe des C

Il nous faut déterminer les pôles de $F(\alpha, C^*, y)$ qui sont donnés par :

$$H_- \Omega_+^2 G'_-(H_-) G_+(H_+) - H_+ \Omega_-^2 G'_+(H_+) G_-(H_-) = 0 \quad (4-2-42)$$

Soit avec les changements de variables précédents

$$\beta_- (\beta_+^2 + 1) G'_-(H_-) G_+(H_+) - \beta_+ (\beta_-^2 + 1) G'_+(H_+) G_-(H_-) = 0 \quad (4-2-43)$$

Considérons maintenant les deux cas bidimensionnels et de révolution

a) Jet bidimensionnel

Cas symétrique

$$\left\{ \begin{array}{l} G'_-(H_-) G_+(H_+) = -2 \sin(H_-) e^{iH_+} \\ G'_+(H_+) G_-(H_-) = 2 \cos(H_+) e^{iH_-} \end{array} \right.$$

d'où

$$e^{iH_+} \left[\beta_- (\beta_+^2 + 1) \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha h}{a_+} \frac{\beta_-}{c}\right) + \beta_+ (\beta_-^2 + 1) \right] = 0 \quad (4-2-44)$$

Cas antisymétrique

$$\left\{ \begin{array}{l} G'_-(H_-) G_+(H_+) = 2 \cos(H_+) e^{-iH_+} \\ G'_+(H_+) G_-(H_-) = -2 \sin(H_-) e^{-iH_-} \end{array} \right.$$

d'où

$$e^{iH_-} \left[\beta_- (\beta_+^2 + 1) \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha h}{a_+} \frac{\beta_-}{c}\right) + \beta_+ (\beta_-^2 + 1) \right] = 0 \quad (4-2-45)$$

Remarque : si on suppose $\lambda \ll h$ les équations se simplifient en :

$$\beta_- (\beta_+^2 + 1) + \beta_+ (\beta_-^2 + 1) = 0 \quad \text{soit} \quad (\beta_+ + \beta_-)(\beta_+ \beta_- + 1) = 0 \quad (4-2-46)$$

b) Jet de révolution

$$\text{On a} \quad \begin{cases} G_-(H_-) = J_m(H_-) \\ G_+(H_+) = H_m^{(0)}(H_+) \end{cases}$$

Si on suppose $\lambda \ll h$ on peut utiliser les approximations asymptotiques de Hankel.

$$\begin{cases} J_m(H_-) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} H_-^{-\frac{1}{2}} e^{-iH_-} e^{i(m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \\ H_m^{(0)}(H_+) = 2\sqrt{\frac{1}{2\pi}} H_+^{-\frac{1}{2}} e^{iH_+} e^{-i(m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \end{cases} \quad (4-2-47)$$

d'où

$$\begin{cases} J'_m(H_-) H_m^{(0)}(H_+) = -\frac{i}{\pi} (H_+ + H_-)^{-\frac{1}{2}} e^{i(H_+ - H_-)} \\ J_m(H_-) H_m^{(0)}(H_+) = \frac{i}{\pi} (H_+ + H_-)^{-\frac{1}{2}} e^{i(H_+ - H_-)} \end{cases} \quad (4-2-48)$$

La condition (4-2-43) s'écrit donc

$$-\frac{i}{\pi} \lambda^2 (H_+ + H_-)^{-\frac{1}{2}} e^{i(H_+ - H_-)} [\beta_- (\beta_+^2 + 1) + \beta_+ (\beta_-^2 + 1)] = 0 \quad (4-2-49)$$

soit

$$(\beta_+ + \beta_-)(\beta_+ \beta_- + 1) = 0 \quad (4-2-50)$$

β_+ et β_- étant des fonctions de C^* on pourra donc déterminer dans le plan des C^* les valeurs C_0^* des pôles.

4.3. INTERACTION PERTURBATION-ONDE DE CIGC

4.3.1. Equation du champ des faibles perturbations dans un écoulement uniforme permanent.

1. Equation de la dynamique

1.1. Ecoulement principal

On considère les équations classiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{équation d'Euler} \\ \text{équation de continuité} \\ \text{équation de conservation de l'énergie} \\ \text{équation d'état} \\ \text{relation d'isentropie} \end{array} \right.$$

$$\frac{D\bar{U}}{Dt} + \frac{1}{\bar{\rho}} \overrightarrow{\text{grad}} \bar{p} = 0 \quad (a)$$

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} + \bar{\rho} \operatorname{div} \bar{U} = 0 \quad (b)$$

$$\frac{\bar{U}^2}{2} + C_p \bar{T} = C^{te} \quad (c)$$

$$\bar{p} = R \bar{\rho} \bar{T} \quad (d)$$

$$\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\gamma} = C^{te} \quad (e)$$

(4-3-1)

1.2. Ecoulement perturbé

A l'écoulement principal on superpose une faible perturbation de vitesse $q(u,v)$, pression p , densité ρ , température T . Les équations de la dynamique s'écrivent

$$\frac{D(\bar{U}+q)}{Dt} + \frac{1}{\bar{\rho}} \overrightarrow{\text{grad}} (\bar{p}+p) \quad (a)$$

$$\frac{D(\bar{\rho}+\rho)}{Dt} + (\bar{\rho}+\rho) \operatorname{div}(\bar{U}+q) \quad (b)$$

$$\frac{(\bar{U}+q)^2}{2} + C_p (\bar{T}+T) \quad (c)$$

$$(\bar{p}+p) = R(\bar{\rho}+\rho)(\bar{T}+T) \quad (d)$$

$$\frac{\bar{p}+p}{(\bar{\rho}+\rho)^\gamma} = C^{te} \quad (e)$$

(4-3-2)

En écrivant ces équations dans le premier ordre pour les petites quantités dans un système d'axes se déplaçant avec la vitesse $\bar{U}$ de l'écoulement principal, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} & (a) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y} & (b) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 & (c) \\ C_v \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{p} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 & (d) \\ \frac{p}{\bar{p}} &= \frac{\rho}{\bar{\rho}} + \frac{T}{\bar{T}} & (e) \\ \gamma \frac{p}{\bar{p}} &= \alpha^2 & (f) \end{aligned} \right\} \quad (4-1-1)$$

2. Equation d'onde

Dérivons l'équation d'état (4-3-3-d) par rapport à t

$$\frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\bar{T}} \frac{\partial T}{\partial t}$$

D'après

$$\frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial p}{\partial t} + R \frac{\bar{p}}{\bar{p}} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4-34)$$

Les équations (4-3-3-b) et (4-3-3-c) nous donnent

$$\frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial p}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (4-3-5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\bar{p}}{C_v \bar{p}} \frac{R \bar{p}}{\bar{p}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{R}{C_v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (4-3-6)$$

En portant dans (4-3-4)

$$\frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial p}{\partial t} = -\left(1 + \frac{R}{C_v}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (4-3-7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\bar{p} \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\bar{p}}{\bar{p}}$$

Soit d'après (4-3-3-c)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (4-3-8)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (4-3-9)$$

Soit d'après (4-3-3-a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \quad \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \quad \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = 0}$$

(1)

3. Equation d'entropie

D'après (4-3-3b) et (4-3-3c)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= -C_v \frac{\bar{\rho}}{\bar{p}} \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \right\} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\bar{p}}{C_v \bar{\rho}} \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4-3-10)$$

En remplaçant dans (4-3-3-d)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + R \frac{\bar{\rho}}{\bar{p}} \frac{1}{C_v \bar{\rho}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{1}{\bar{p}} \left(1 + \frac{R}{C_v} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\gamma}{\bar{p}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (4-3-11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\bar{p}} - \gamma \frac{\rho}{\bar{p}} \right) = 0$$

$$\text{Or} \quad S = C_v \left(\frac{\rho}{\bar{p}} - \gamma \frac{\rho}{\bar{p}} \right)$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\frac{\partial S}{\partial t} = 0} \quad (11)$$

4. Equation du rotationnel

D'après (4-3-3-a)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (12)$$

$$\text{or} \quad \Omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0} \quad (13)$$

4.3.2. Perturbation d'entropie

Considérons une onde plane d'entropie, dont le front est parallèle à l'axe $O\xi$ (porté par la vitesse ω). Dans le système de coordonnées d'axes $(O\xi, O\eta)$, on a alors

$$s = f(\eta)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} s = \frac{\partial s}{\partial \eta} \vec{e}_\eta$$

or on a

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \eta}$$

avec

$$\overrightarrow{\text{grad}} H = 0$$

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \eta} = -\frac{T}{W} \overrightarrow{\text{grad}} s$$

d'où

$$\omega = -\frac{T}{W} s \quad (4-3-13)$$

Une perturbation d'entropie correspond à une perturbation de vitesse rotationnelle.

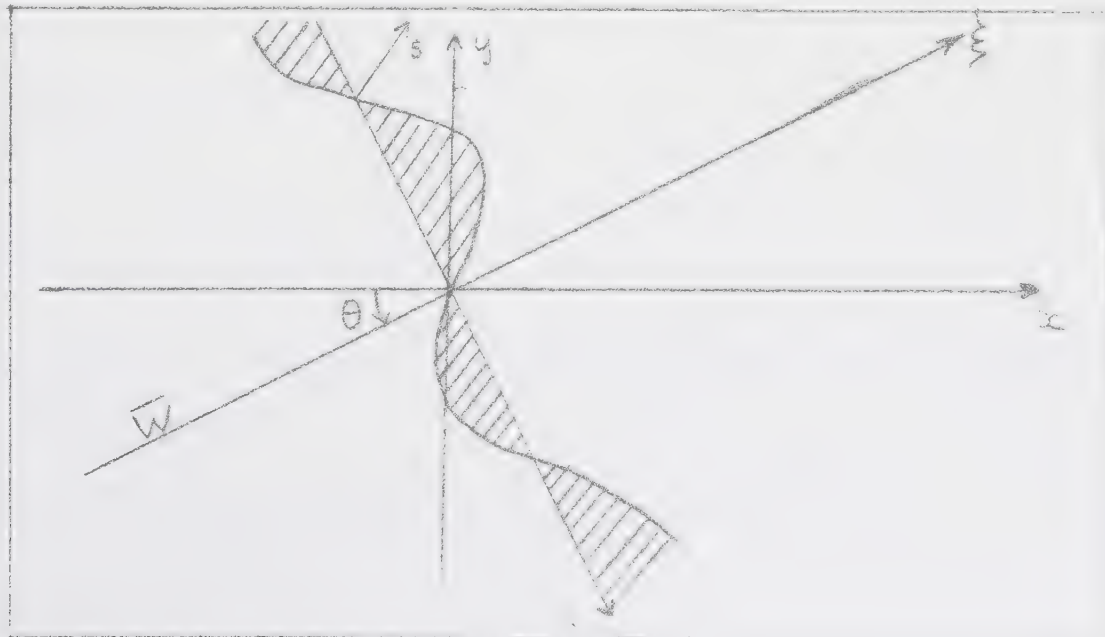


Fig. (4-2)

4.3.3. Champ d'un tourbillon isolé

On sait que tout écoulement plan stationnaire de fluide incompressible défini dans le plan complexe des z , sauf à l'origine des coordonnées 0 , est un écoulement issu d'un tourbillon isolé ponctuel placé en 0 , si les lignes de courant sont des cercles et si la vitesse reste constante sur chaque ligne de courant.

Soit Γ la circulation le long d'un contour entourant le point 0 dans le sens direct; on a, lorsque l'écoulement ne dépend pas de l'angle polaire φ

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log r \quad \text{fonction de courant} \quad (4-3-11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial \varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \\ \frac{\partial q}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (4-3-12)$$

L'équation d'Helmholtz obtenue en prenant le rotationnel des deux membres de l'équation de Navier-Stokes (pour un écoulement visqueux dont on a négligé les forces volumiques, en tenant compte du fait que, pour un écoulement incompressible $\vec{\text{rot}} (\vec{\Omega} \wedge \vec{q}) = 0$), nous conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} q^2 + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{q} + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P &= \nu \Delta \vec{q} \\ \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} &= \nu \Delta \vec{\Omega} = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (4-3-16)$$

Cette équation, qui exprime la diffusion de la rotation dans un milieu de révolution, admet pour solution :

$$\Omega(r, t) = \frac{C}{t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \quad (4-3-17)$$

A un instant donné t , la circulation le long d'un cercle de rayon r , orienté dans le sens positif est égale à :

$$\Gamma(r, t) = \int_0^t 2\Omega \times 2\pi r dr = 8\pi \nu C \left[1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right] \quad (4-3-18)$$

avec $\bar{\Gamma} = \Gamma(r, 0)$ représentant la circulation initiale du tourbillon.

Donc
$$C = \frac{\bar{\Gamma}}{8\pi\Omega} \quad (4-3-12)$$

Soit en définitive

$$q_i(r, t) = \frac{\bar{\Gamma}}{2\pi r} \left[1 - e^{-\frac{r^2}{4\eta t}} \right] \quad (4-3-10)$$

représentant la vitesse du tourbillon dans l'écoulement incident, en fonction de la distance radiale avec le temps pour paramètre. (Voir (a))

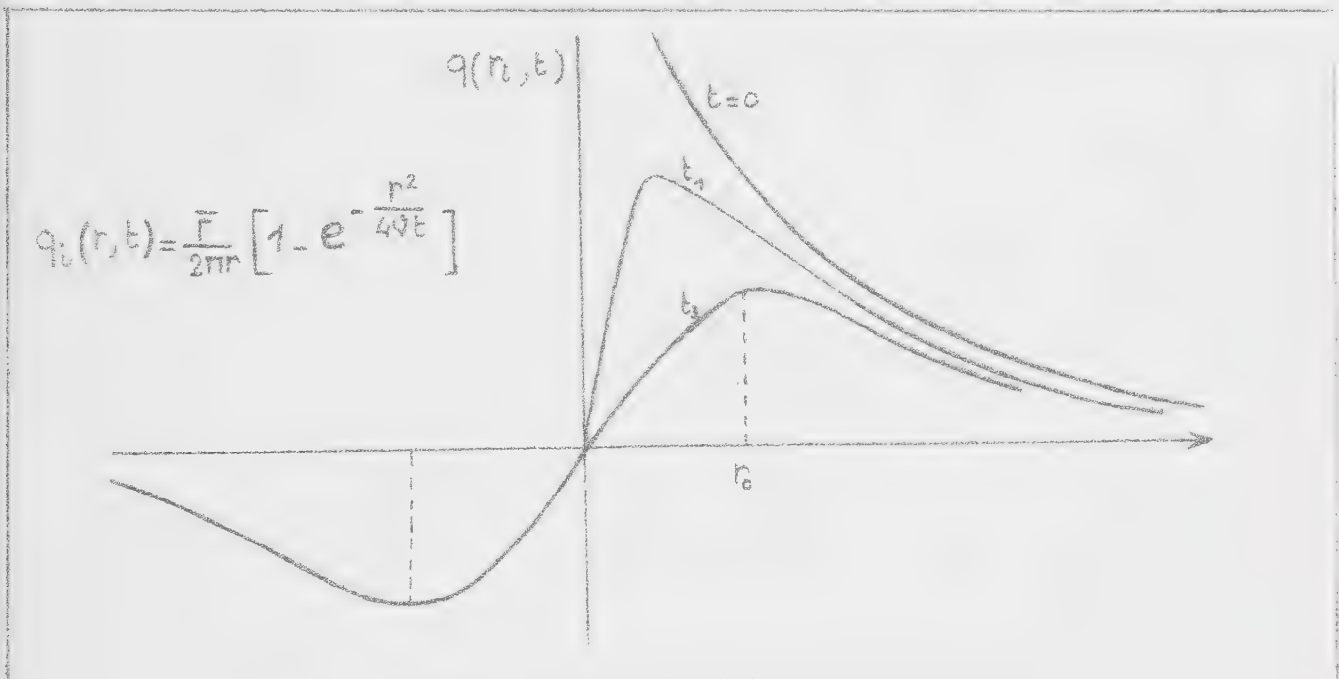


Fig. (4-3)

Discussion: $r = 0$ $r = 0$
 $t = 0$ $t \neq 0$

Pour tout $t \neq 0$ et pour tout $0 < r < 2\pi$, q atteint une valeur maximum q_m pour $r = r_0$

r_0 est appelé rayon du tourbillon.

On calcule r_0 et q_m (Voir (b))

$$r_0 = \sqrt{5\eta t} \quad (4-3-21)$$

$$q_{\max} = 0,415 \frac{\bar{\Gamma}}{\sqrt{4\eta t}} \quad (4-3-22)$$

a) La fonction de courant ψ est donnée sous la forme :

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log Z = -\frac{\Gamma}{2\pi} (\log r + j\varphi) \quad (4-3-23)$$

Γ = circulation le long d'un contour centré en o, dans le sens direct.

Si l'écoulement ne dépend pas de l'angle polaire, nous avons :

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log r$$

donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \\ \frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

la relation de Navier-Stokes pour un écoulement visqueux, dont on a négligé les forces volumiques s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } q^2 + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{q} + \frac{1}{2} \text{grad } p = \nu \Delta \vec{q}$$

D'après cette relation, on obtient l'équation d'Helmholtz en prenant le rotationnel des deux membres ($\text{rot}(\text{grad}) = 0$)

$$\begin{aligned} \text{rot} \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + 2 \text{rot}(\vec{\Omega} \wedge \vec{q}) &= \nu \text{rot} \Delta \vec{q} = \nu \Delta \vec{\Omega} \\ &= \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

D'autre part dans un écoulement incompressible :

$$\text{rot}(\vec{\Omega} \wedge \vec{q}) = 0$$

d'où

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{\Omega} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \cdot r \cdot \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial r}$$

Cette équation exprime la diffusion de la rotation $\vec{\Omega}$ dans un milieu de révolution ; sa solution est :

$$\Omega(r, t) = \frac{c}{t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$$

c = constante d'intégration.

b) $\frac{\partial q}{\partial r} = 0$ entraîne $e^{-\bar{z}}(1 + 2\bar{z}) = 1$

avec $\bar{z} = \frac{r_0^2}{4\nu t}$

Ce qui donne

$$\bar{z} \simeq 1,25$$

d'où $r_0 \simeq \sqrt{5\nu t}$

On a alors

$$\begin{aligned} q_{\max} &= \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1 - e^{-\frac{5\nu t}{4\nu t}}}{\sqrt{5\nu t}} \\ &\simeq \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1 - e^{-\frac{5}{4}}}{\sqrt{\nu t}} \simeq 0,115 \frac{\Gamma}{\sqrt{\nu t}} \end{aligned}$$

4.3.4. Décomposition d'un tourbillon isolé en ondes élémentaires

sinusoïdales planes

On décompose en série de Fourier, sous tous les angles de 0 à 2π et tous les nombres d'onde de 0 à ∞ la vitesse $q(r, \varphi)$ prise à un instant t_1 donné, dans le milieu incident.

Considérons cette vitesse suivant une direction φ dans le plan de l'écoulement $(0, x_1, x_2)$ à un instant donné t_1 .

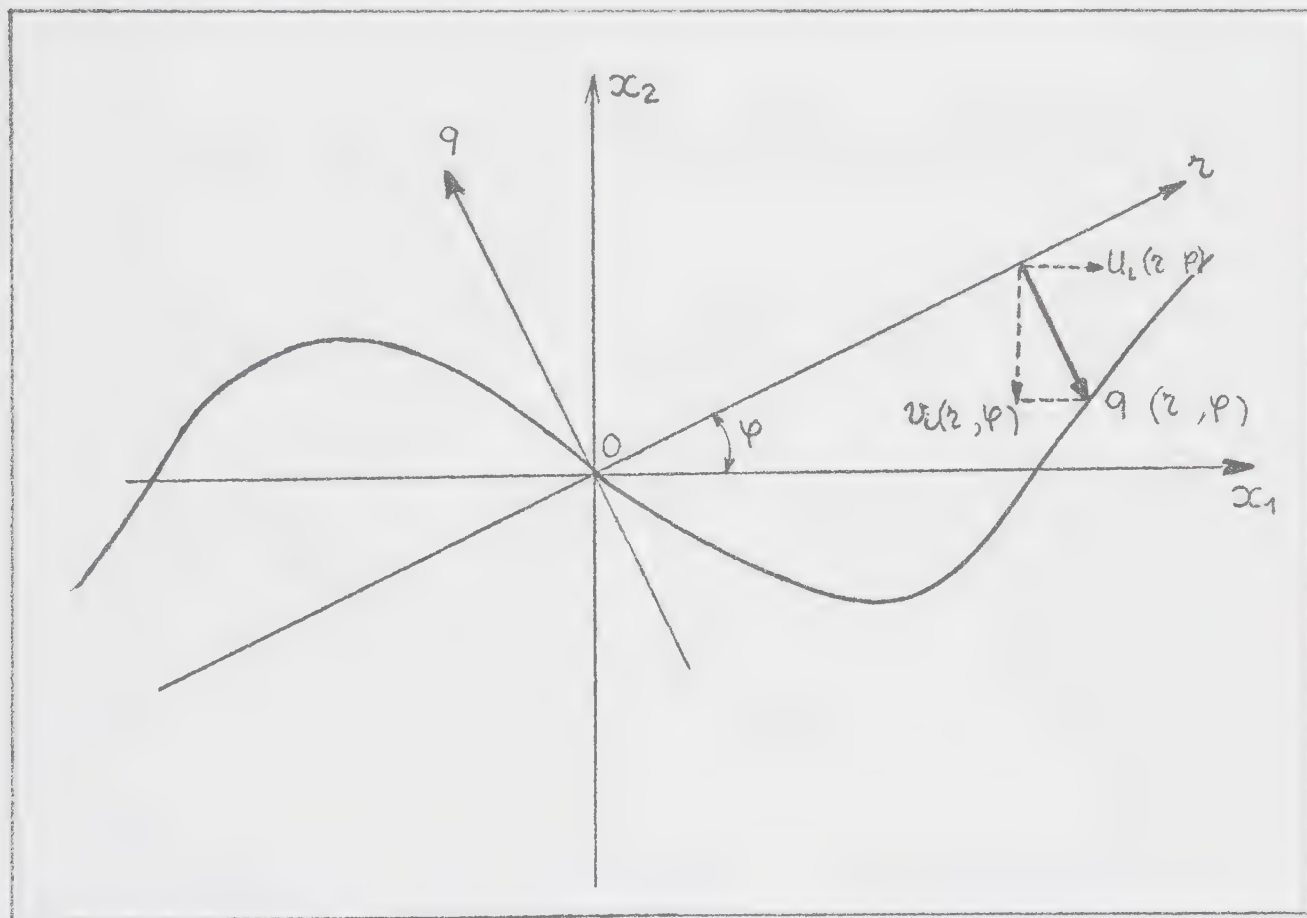


Fig.(4-4)

On utilise la transformation de Fourier pour les deux variables r et φ respectivement transformées en k et α

Les composantes parallèles aux axes de $q(r,t)$ sont :

$$\begin{cases} u(r,\varphi) = q(r,\varphi) \sin \varphi = \frac{\vec{r}}{2\pi r} \left[1 - e^{-\frac{r^2}{4\eta t}} \right] \sin \varphi \\ v(r,\varphi) = q(r,\varphi) \cos \varphi = \frac{\vec{r}}{2\pi r} \left[1 - e^{-\frac{r^2}{4\eta t}} \right] \cos \varphi \end{cases} \quad (4-1)$$

D'où

$$\begin{cases} u(r,\varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\eta t}} \right) \sin \varphi e^{-jkr \cos(\alpha-\varphi)} r dr d\varphi e^{jkr \cos(\alpha-\varphi)} k dk d\theta \\ v(r,\varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\eta t}} \right) \cos \varphi \quad " \quad " \quad k dk d\theta \end{cases} \quad (4-2)$$

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I_1 dr \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4\eta t}} dr e^{jkr \cos(\alpha-\varphi)} r dk d\theta \quad (4-3)$$

avec
$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sin \varphi e^{-jkr \cos(\alpha-\varphi)} d\varphi \quad (4-3-2)$$

1. Calcul de I_1

Posons

$$\alpha - \varphi = \theta$$

$$I_1 = \sin \alpha \int_0^{2\pi} \cos \theta e^{-jkr \cos \theta} d\theta - \cos \alpha \int_0^{2\pi} \sin \theta e^{-jkr \cos \theta} d\theta \quad (4-3-3)$$

$$I_1 = \sin \alpha \int_0^{2\pi} \cos \theta \cos(kr \cos \theta) d\theta - \cos \alpha \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos(kr \cos \theta) d\theta$$

$$- j \left[\sin \alpha \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin(kr \cos \theta) d\theta - \cos \alpha \int_0^{2\pi} \sin \theta \sin(kr \cos \theta) d\theta \right] \quad (4-3-29)$$

Par symétrie par rapport à $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \cos(kr \cos \theta) d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \sin(kr \cos \theta) d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos(kr \cos \theta) d\theta = 0$$

Donc

$$I_1 = -4j \sin \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin(kr \cos \theta) d\theta \quad (4-3-30)$$

Posons

$$\begin{cases} \cos \theta = t \\ kr = x \end{cases} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin(kr \cos \theta) d\theta = \int_0^1 \frac{t \sin xt}{1-t^2} dt$$

$$I_1 = -4j \sin \alpha \left[-(\sqrt{1-t^2} \sin xt)_0^1 - x \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cos xt dt \right]$$

$$\text{or } \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cos xt dt = \frac{\pi}{2} \frac{J_1(x)}{x}$$

J_1 = fonction de Bessel du 1er ordre.

$$I_1 = -2j\pi \sin \alpha J_1(kr) \quad (4-3-31)$$

2. Calcul de I_2 $= \int_0^{\infty} I_1 dr$

$$I_2 = -2j\pi \sin\alpha \int_0^{\infty} J_1(kr) dr = -\frac{2j\pi \sin\alpha}{k} \int_0^{\infty} J_1(x) dx \quad (4-3-32)$$

or : $\int x^0 J_1(x) dx = -\int x^0 J_{-1}(x) dx = -x^0 J_0(x) = -J_0(x)$

$$I_2 = \frac{2j\pi \sin\alpha}{k} [J_0(kr)]_0^{\infty} = -\frac{2j\pi \sin\alpha}{k}$$

avec $\begin{cases} J_0(\infty) = 0 \\ J_0(0) = 1 \end{cases}$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} \sin\varphi e^{-jkr\cos(\alpha-\varphi)} d\varphi \right] dr = -\frac{2j\pi \sin\alpha}{k} \quad (4-3-33)$$

3. Calcul de I_3 $= -\int_0^{\infty} I_1 e^{-\frac{r^2}{4\gamma t}} dr$

$$I_3 = 2j\pi \sin\alpha \int_0^{\infty} J_1(kr) e^{-\frac{r^2}{4\gamma t}} dr$$

En utilisant la relation générale

$$e^{-ax^2} x^{\mu+1} J_n(bx) dx = \frac{b^n \Gamma(\frac{\mu+n}{2})}{2^{n+1} a^{\mu+n} \Gamma(n+1)} e^{-\frac{b^2}{4a}} F\left[\frac{n-\mu}{2}+1; h+1; \frac{b^2}{4a}\right]$$

avec $F(\alpha, \gamma, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha, 1, j}{j! (\gamma, 1, j)} \xi^j$

F = série hypergéométrique de Pochhammer - Kummer

Γ = Série d'Euler

En identifiant les coefficients on a :

$$a^2 = \frac{1}{4\varphi t} \quad ; \quad b = k \quad ; \quad n = 1 \quad ; \quad \mu = 1$$

$$\text{d'où} \quad \xi = \frac{b^2}{4a^2} = k^2 \varphi t \quad ; \quad \alpha = \frac{n-\mu}{2} + 1 = 1$$

$$\gamma = n+1 = 2$$

$$\begin{cases} \Gamma(1) = 0! = 1 \\ \Gamma(2) = 1! = 1 \end{cases} \quad \frac{b^n \Gamma\left(\frac{\mu+n}{2}\right)}{2^{n+1} a^{\mu+n} \Gamma(n+1)} = k \varphi t$$

$$F(\alpha, \gamma, \xi) = \frac{1}{\xi} [e^{\xi} - 1] \quad (4-3-34)$$

$$I_3 = 2j\pi \sin\alpha \cdot k \varphi t \cdot e^{-k^2 \varphi t} \cdot \frac{1}{k^2 \varphi t} [e^{k^2 \varphi t} - 1] \quad (4-3-35)$$

$$I_3 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} [-\sin\varphi e^{-jkr\cos(\alpha-\varphi) - \frac{r^2}{4\varphi t}} d\varphi] dr = \frac{2j\pi \sin\alpha}{k} [1 - e^{-k^2 \varphi t}] \quad (4-3-36)$$

$$I_2 + I_3 = -\frac{2j\pi \sin\alpha}{k} e^{-k^2 \varphi t} \quad (4-3-37)$$

4. D'où

$$\left\{ \begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{j\Gamma}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\varphi t k^2} \sin\alpha e^{jkr\cos(\alpha-\varphi)} dk d\alpha \\ v(r, \varphi) &= -\frac{j\Gamma}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\varphi t k^2} \cos\alpha e^{jkr\cos(\alpha-\varphi)} dk d\alpha \end{aligned} \right. \quad (4-3-38)$$

4.3.5. Analyse sommaire de l'interaction entre une onde de choc et une perturbation plane.

On a vu précédemment que les équations du mouvement impliquent que toute faible perturbation peut être décomposée en deux parties:

- a) un champ non permanent isentropique et irrotationnel d'ondes longitudinales.
- b) Un champ permanent de vitesse rotationnelle se décomposant en un champ de vitesse de cisaillement isentropique et un champ d'entropie.

On peut représenter par un schéma simplifié l'interaction entre une onde incidente sonore plane, par exemple, et une onde de choc. On met en évidence la naissance d'une onde stationnaire de vitesse rotationnelle combinée soit avec une simple onde sonore plane, soit avec une onde de pression atténuée (suivant l'angle d'incidence de la perturbation initiale) fig. (4-5).

Au temps t_1 l'onde sonore rencontre le choc en P_1

$t_1 + dt$ " " P_2

Pendant le temps dt le choc s'est déplacé de la distance $\bar{U}_c dt$
l'onde sonore de la distance $a_1 dt$

Au point P_1 une onde sonore cylindrique a été engendrée à l'instant t_1 .

Cette onde sonore s'étend à la vitesse a du milieu derrière l'onde de choc et se déplace à la vitesse U de l'écoulement.

Au temps t_2 l'onde sera donc représentée par un cercle centré en Q_2 tel que $P_1 Q_2 = U dt$ et de rayon $a_2 dt$.

Toutes les ondes ayant été engendrées par l'interaction pendant l'intervalle de temps dt sont donc des cercles centrés sur la droite $P_2 Q_2$. Deux cas peuvent alors se présenter suivant l'angle d'incidence de l'onde sonore.

a) Les ondes admettent une enveloppe qui peut être identifiée à une simple onde plane sonore réfractée.

b) Il n'existe pas d'enveloppe et l'ensemble des ondes acoustiques cylindriques apparaît comme une onde de pression amortie n'ayant pas la vitesse du son.

D'autre part, à l'interaction entre le choc et l'onde sonore, il s'est créé une perturbation de vitesse rotationnelle qui se déplace à la vitesse U de l'écoulement derrière le choc. Une onde de vitesse rotationnelle apparaît donc le long de la droite reliant P_2 à Q_2 , quelque soit l'angle .

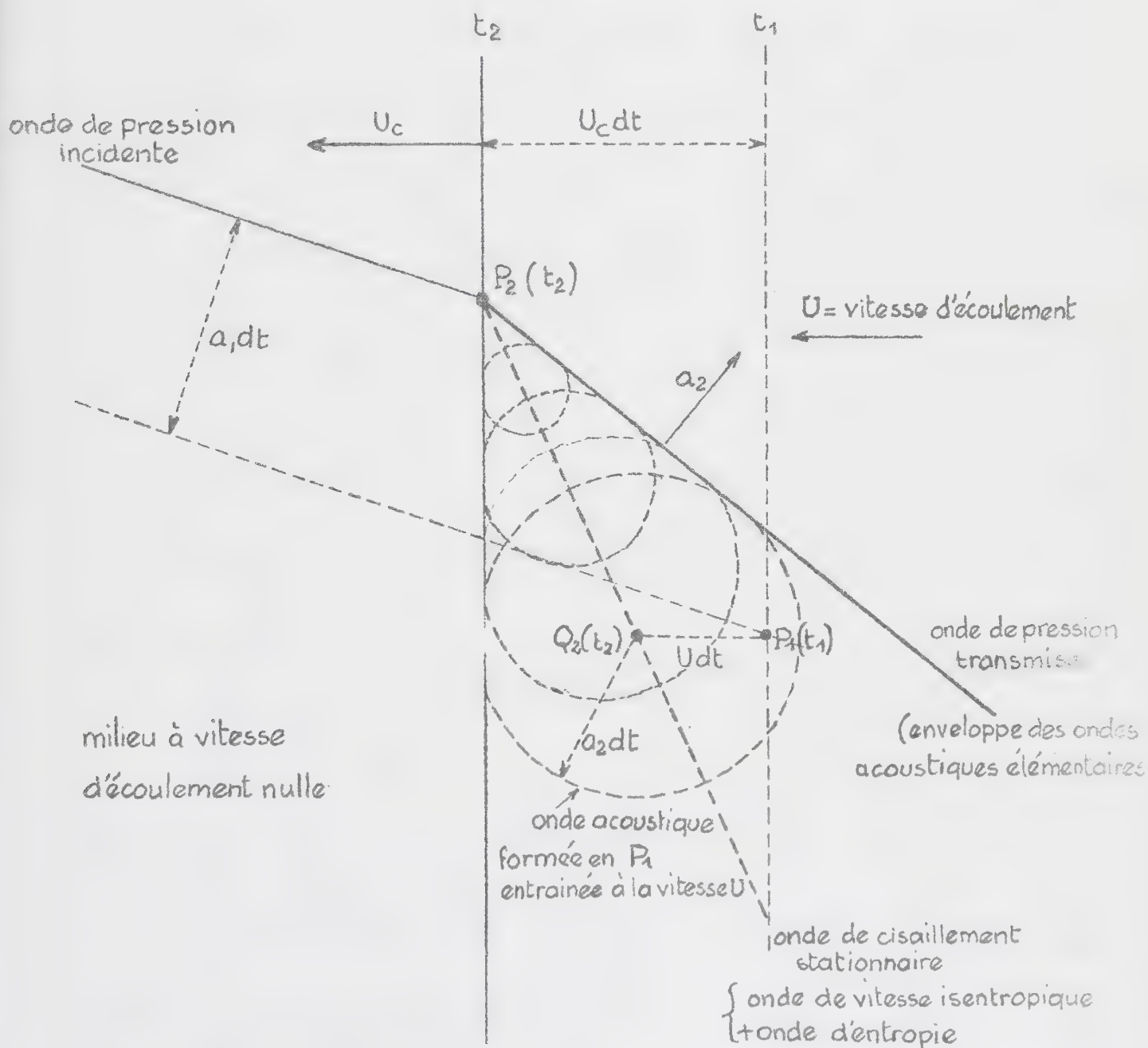


Fig: (4-5)

4.3.6. Equation générale différentielle de l'écoulement perturbé.

On considère un écoulement adiabatique bidimensionnel permanent de fluide non visqueux.

Equation de conservation de la masse :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\rho} \operatorname{div} \vec{\omega} = 0 \quad (4-3-39)$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\vec{\omega}}{Dt} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{1}{\bar{\rho}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p = 0 & (a) \\ \text{avec } \frac{\partial \omega}{\partial t} &= 0 \\ \vec{W} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \omega + \frac{1}{\bar{\rho}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p &= 0 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4-3-40)$$

En projetant sur les axes $O\xi, O\eta$

$$\left. \begin{aligned} \vec{W} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial \xi} &= 0 & (a) \\ \vec{W} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial \xi} &= 0 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4-3-41)$$

Equation de l'énergie

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{W} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} s = 0 & (a) \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= 0 \implies \overrightarrow{\operatorname{grad}} s = 0 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4-3-42)$$

Les équations (4.2) (4.4) et (4.5) conduisent à :

$$\left(1 - \frac{\bar{W}^2}{a^2}\right) \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \frac{\partial v'}{\partial \eta} = 0 \quad (4-3-43)$$

Le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ est défini par :

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial v'}{\partial \xi} - \frac{\partial u'}{\partial \eta} \quad (4-3-44)$$

Si on pose

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \\ v' &= -\left(1 - \frac{\bar{W}^2}{a^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \quad (4-3-4)$$

L'équation (4.6) s'écrit :

$$\left(1 - \frac{\bar{W}^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -\Omega \quad (4-3-4)$$

Ecrivons maintenant les équations de quantité de mouvement, d'enthalpie totale, et la 2ème équation de la thermodynamique :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(\bar{W}^2) + \bar{\Omega} \wedge \bar{W} + \frac{1}{\bar{\rho}} \overrightarrow{\text{grad}} p &= 0 \\ H &= h + \frac{p}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{W}^2}{2} \\ T \overrightarrow{\text{grad}} S &= \overrightarrow{\text{grad}} h + p \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{\bar{\rho}} \end{aligned} \right\} \quad (4-3-4)$$

On obtient :

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{\bar{W}} (\overrightarrow{\text{grad}} H - T \overrightarrow{\text{grad}} S) \quad (4-3-5)$$

avec $\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial \bar{n}}$; $\bar{n}$ vecteur normal à $\bar{W}$

c'est-à-dire : $\frac{\partial}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial}{\partial \eta}$

d'où $\left(1 - \frac{\bar{W}^2}{a^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\bar{W}} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} - T \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) \quad (4-3-6)$

4.3.7. Relations du choc

En partant des équations de la dynamique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{équation de conservation de la masse} \\ \text{équation de conservation de la quantité de mouvement} \\ \text{équation de conservation de l'énergie} \\ \text{équation d'état} \\ \text{équation d'isentropie pour l'écoulement principal} \end{array} \right.$$

écrites pour l'écoulement principal et l'écoulement perturbé, on obtient :

écoulement principal

$$\left. \begin{array}{ll} \bar{p}_i \bar{U}_i = \bar{p}_r \bar{U}_r & (a) \\ \bar{U}_r \bar{U}_i = \frac{\gamma-1}{\gamma-1} \bar{U}_i^2 + \frac{2\gamma R}{\gamma-1} \bar{T}_i & (b) \\ \frac{1}{2} \bar{U}_i^2 + \frac{\gamma R}{\gamma-1} \bar{T}_i = \frac{1}{2} \bar{U}_r^2 + \frac{\gamma R}{\gamma-1} \bar{T}_r & (c) \\ \frac{\bar{p}_i}{\bar{\rho}_i} = R \bar{T}_i \quad ; \quad \frac{\bar{p}_r}{\bar{\rho}_r} = R \bar{T}_r & (d) \\ a_i^2 = \gamma \frac{\bar{p}_i}{\bar{\rho}_i} \quad ; \quad a_r^2 = \gamma \frac{\bar{p}_r}{\bar{\rho}_r} & (e) \end{array} \right\} \quad (4-3-50)$$

écoulement perturbé

$$\left. \begin{array}{ll} \bar{\rho}_i \bar{U}_i + \bar{\rho}_i u_i = \bar{\rho}_r \bar{U}_r + \bar{\rho}_r u_r & (a) \\ \bar{U}_i u_i + \frac{\gamma}{\gamma-1} R \bar{T}_i = \bar{U}_r u_r + \frac{\gamma}{\gamma-1} R \bar{T}_r & (b) \\ \bar{U}_i u_r - \bar{U}_r u_i = 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left[\bar{U}_i u_i + \frac{\gamma}{\gamma-1} R \bar{T}_i \right] & (c) \\ \frac{p_i}{\bar{\rho}_i} = \frac{\bar{p}_i}{\bar{\rho}_i} - \frac{T}{\bar{T}_i} \quad ; \quad \frac{p_r}{\bar{\rho}_r} = \frac{\bar{p}_r}{\bar{\rho}_r} - \frac{T}{\bar{T}_r} & (d) \\ \frac{s}{c_p} = \frac{p_i}{\bar{\rho}_i a_i^2} + \frac{p_i}{\bar{\rho}_i} \quad ; \quad \frac{s}{c_p} = \frac{p_r}{\bar{\rho}_r a_r^2} + \frac{p_r}{\bar{\rho}_r} & (e) \end{array} \right\} \quad (4-3-51)$$

1. Ecoulement principal

On considère les équations classiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{conservation de la masse} \\ \text{conservation de la quantité de mouvement en projection sur la normale} \\ \text{à l'onde de choc} \\ \text{conservation de l'énergie.} \end{array} \right.$$

$$\bar{\rho}_i \bar{U}_i = \bar{\rho}_r \bar{U}_r \quad (a)$$

$$\bar{\rho}_r \bar{U}_r^2 - \bar{\rho}_i \bar{U}_i^2 = \bar{p}_i - \bar{p}_r \quad (b) \quad (4-3-52)$$

$$\frac{\bar{W}_i^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_i}{\bar{\rho}_i} = \frac{\bar{W}^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_r}{\bar{\rho}_r} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a_c^2 \quad (c)$$

$$\left. \begin{array}{l} W_i^2 = U_i^2 + V_i^2 \\ W_r^2 = U_r^2 + V_r^2 \end{array} \right\} \quad V_i = V_r$$

$$\frac{\bar{U}_i^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_i}{\bar{\rho}_i} = \frac{\bar{U}_r^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_r}{\bar{\rho}_r} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a_c^2 \quad (c')$$

D'après (52-c')

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{p}_i = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \bar{\rho}_i \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} a_c^2 - \bar{U}_i^2 \right) \\ \bar{p}_r = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \bar{\rho}_r \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} a_c^2 - \bar{U}_r^2 \right) \end{array} \right.$$

En remplaçant dans (52-b)

$$\bar{U}_r^2 - \frac{\bar{P}_r}{\bar{\rho}} \bar{U}_r^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\bar{P}_r}{\bar{\rho}} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} a_c^2 - \bar{U}_r^2 \right) - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} a_c^2 - \bar{U}_r^2 \right) \quad (b')$$

avec

$$\frac{\bar{P}_r}{\bar{\rho}_r} = \frac{\bar{U}_r}{\bar{U}_l} \quad (a')$$

On obtient :

$$\bar{U}_r^2 - \bar{U}_l \bar{U}_r = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \bar{U}_r^2 + \frac{\bar{U}_r}{\bar{U}_l} \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} a_c^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \bar{U}_l^2 \right) - \frac{\gamma-1}{2\gamma} a_c^2$$

$$\bar{U}_r^2 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) - \bar{U}_l \bar{U}_r \left(1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{\bar{U}_r}{\bar{U}_l} - 1 \right) a_c^2$$

$$\frac{\gamma-1}{2\gamma} \bar{U}_r (\bar{U}_r - \bar{U}_l) = \frac{\gamma-1}{2} \frac{\bar{U}_r - \bar{U}_l}{\bar{U}_l} a_c^2$$

$$\bar{U}_l \bar{U}_r = a_c^2$$

avec $a_c^2 = 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{\bar{U}_l^2}{2} + C_p \bar{T}_l \right)$

soit

$$\bar{U}_l \bar{U}_r = 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{\bar{U}_l^2}{2} + C_p \bar{T}_l \right) \quad (c')$$

On utilise donc les relations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{P}_l \bar{U}_l = \bar{P}_r \bar{U}_r \end{array} \right. \quad (a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{U}_l^2}{2} + C_p \bar{T}_l = \frac{\bar{U}_r^2}{2} + C_p \bar{T}_r \end{array} \right. \quad (b) \quad (4-3-52)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{U}_l \bar{U}_r = 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{\bar{U}_l^2}{2} + C_p \bar{T}_l \right) \end{array} \right. \quad (c)$$

avec l'équation d'état

$$\left\{ \begin{array}{l} P_l = R \rho_l T_l \end{array} \right. \quad (a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_r = R \rho_r T_r \end{array} \right. \quad (b) \quad (4-3-53)$$

la relation d'isentrobie (avant le choc)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{p}_i}{\bar{\rho}_i^\gamma} = c^{te} \end{array} \right. \quad (a) \quad (4-3-54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i^2 = \gamma R \bar{T}_i = \gamma \frac{\bar{p}_i}{\bar{\rho}_i} \end{array} \right. \quad (b)$$

D'après les relations (52) à (54) on va tirer deux relations qui seront utiles.

a) Considérons (52c)

$$\bar{U}_i^2 \frac{\bar{U}_r}{\bar{U}_i} = 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{\bar{U}_i^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_i}{\bar{\rho}_i} \right) = 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{\bar{U}_i^2}{2} + \frac{a_i^2}{\gamma-1} \right)$$

$$M_i^2 \frac{\bar{U}_r}{\bar{U}_i} = 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{M_i^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \right)$$

$$\frac{\bar{U}_r}{\bar{U}_i} = \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_r} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_i^2} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right] \quad (4-3-55)$$

avec $M_i = \frac{\bar{U}_i}{a_i}$

b) Considérons l'équation de conservation de l'énergie (52-b)

$$\frac{\bar{U}_i^2}{2} + C_p \bar{T}_i = \frac{\bar{U}_r^2}{2} + C_p \bar{T}_r$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \bar{T}_i = \frac{a_i^2}{\gamma R} \\ \bar{T}_r = \frac{1}{R} \frac{\bar{p}_r}{\bar{\rho}_r} = \frac{1}{R} \frac{\bar{p}_r}{\bar{\rho}_r} \gamma \frac{\bar{p}_i}{\bar{\rho}_i} \frac{\bar{\rho}_i}{\gamma \bar{p}_i} = \frac{a_i^2}{\gamma R} \frac{\bar{p}_r \bar{\rho}_i}{\bar{p}_i \bar{\rho}_r} = \frac{a_i^2}{\gamma R} \frac{\bar{p}_r}{\bar{p}_i} \frac{\bar{U}_r}{\bar{U}_i} \end{array} \right.$

$$\frac{\bar{U}_i^2}{a_i^2} + \frac{2}{\gamma-1} = \frac{\bar{U}_i^2}{a_i^2} \frac{\bar{U}_r^2}{\bar{U}_i^2} + \frac{2}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_r}{\bar{p}_i} \frac{\bar{U}_r}{\bar{U}_i}$$

$$M_i^2 + \frac{2}{\gamma-1} = \frac{2}{\gamma-1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right) = \frac{\bar{U}_r}{\bar{U}_i} \left(\frac{\bar{U}_r}{\bar{U}_i} M_i^2 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_r}{\bar{p}_i} \right)$$

en remplaçant $\frac{\bar{U}_r}{\bar{U}_i}$ par sa valeur (4-3-55)

$$1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 = \frac{\gamma-1}{2} \left\{ \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_i^2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right) \left[\frac{2}{\gamma-1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right) + \frac{2}{\gamma} \frac{\bar{P}_r}{\bar{P}_i} \right] \right\}$$

$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{M_i^2} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right) + \frac{2}{\gamma-1} \frac{\bar{P}_r}{\bar{P}_i} \right]$$

$$\frac{\gamma+1}{2} M_i^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right) + \frac{\bar{P}_r}{\bar{P}_i}$$

$$\frac{\bar{P}_r}{\bar{P}_i} = \left[\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{\gamma-1}{2} \right] M_i^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$\frac{\bar{P}_r}{\bar{P}_i} = \frac{2}{\gamma+1} \left[\gamma M_i^2 - \frac{\gamma-1}{2} \right] \quad (4-3-56)$$

2. Ecoulement perturbé

En écrivant les équations (4-3-52) pour l'écoulement perturbé, dans le premier ordre pour les petites quantités, on obtient :

$$\rho_i \bar{U}_i + \bar{\rho}_i u_i = \rho_r \bar{U}_r + \bar{\rho}_r u_r \quad (4-3-57)$$

$$\bar{U}_i u_i + C_p T_i = \bar{U}_r u_r + C_p T_r \quad (4-3-58)$$

$$\bar{U}_i u_r + \bar{U}_r u_i = 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left[\bar{U}_i u_i + C_p T_i \right] \quad (4-3-59)$$

d'après l'équation d'état

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_i}{\bar{P}_i} = \frac{P_i}{\bar{P}_i} + \frac{T_i}{\bar{T}_i} \end{array} \right. \quad (a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_r}{\bar{P}_r} = \frac{P_r}{\bar{P}_r} + \frac{T_r}{\bar{T}_r} \end{array} \right. \quad (b)$$

d'après la relation d'isentropie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{s_l}{C_p} = \frac{p_l}{\bar{p}_l a_l^2} - \frac{p_l}{\bar{p}_l} \quad \text{soit} \quad a_l^2 = \frac{p_l}{\bar{p}_l} \\ \frac{s_r}{C_p} = \frac{p_r}{\bar{p}_r a^2} - \frac{p_r}{\bar{p}_r} \end{array} \right. \quad (4-2-61)$$

A ces relations générales, on peut ajouter :

$$\frac{T_l}{T_l} = \frac{p_l}{\bar{p}_l} - \frac{p_l}{\bar{p}_l} \Rightarrow T_l = \left(\frac{p_l}{\bar{p}_l} - \frac{p_l}{\bar{p}_l} \right) \bar{T}_l$$

$$T_l = \frac{1}{R} \frac{\bar{p}_l}{\bar{p}_l} \left(\frac{p_l}{\bar{p}_l} - \frac{p_l}{\bar{p}_l} \right) \quad (4-3-1)$$

$$\frac{T_l}{T_l} = (\gamma - 1) \frac{p_l}{\bar{p}_l} \Rightarrow T_l = \frac{\gamma - 1}{\gamma R} \frac{p_l}{\bar{p}_l} a_l^2$$

$$T_l = \frac{1}{C_p} \frac{p_l}{\bar{p}_l} a_l^2 \quad (4-3-63)$$

3. Les relations (4.3.51) permettent d'exprimer les grandeurs derrière le choc après interaction, linéairement en fonction de deux variables seulement $\frac{U_i}{U_c}$ et $\frac{p_i}{p_c}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_r}{U_c} &= A_1 \frac{u_i}{U_c} + B_1 \frac{p_i}{p_c} & (a) \\ \frac{v_r}{U_c} &= A_2 \frac{u_i}{U_c} + B_2 \frac{p_i}{p_c} & (b) \\ \frac{p_r}{p_c} &= A_3 \frac{u_i}{U_c} + B_3 \frac{p_i}{p_c} & (c) \\ s &= A_4 \frac{u_i}{U_c} + B_4 \frac{p_i}{p_c} & (d) \\ \frac{U_r}{U_c} &= \frac{\omega_i \sin \theta_i}{U_c} - \delta(\bar{x})_y \frac{M_i}{M_c} & (e) \end{aligned} \right\} \quad (4-3-64).$$

Les coefficients A et B sont calculés dans le paragraphe suivant.
D'autre part, l'équation de l'enthalpie,

$$\begin{aligned} H &= C_p (\bar{T}_i + T_i) + \frac{1}{2} (\bar{W}_i + \omega_i)^2 \\ &= C_p \left(\bar{T}_i + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p_i}{p_c} \right) + \frac{1}{2} \frac{U_i^2}{\cos^2 \theta_i} \left(1 + 2 \frac{\omega_i}{U_c} \cos \theta_i \right) \end{aligned} \quad (4-3-65)$$

compte tenu de l'équation d'Euler pour les petites perturbations isentropiques :

$$\frac{p_i}{p_c} + W_i \omega_i \cos(\theta_i - \theta'_i) = 0 \quad (4-3-66)$$

qui s'écrit aussi

$$\frac{p_i}{p_c} = - \frac{\gamma}{\cos \theta_i} M_i M_c \cos(\theta_i - \theta'_i) \frac{\omega_i}{U_i} \quad (4-3-67)$$

nous donne

$$H = C_p T_c + \frac{1}{2} W_c^2 + \left[C_p T_c A_5 + U_i^2 \delta \frac{\cos(\theta_i - \theta'_i)}{\cos \theta_i} \frac{\omega_i}{U_i} \right] \quad (4-3-68)$$

avec

$$A_5 = - \frac{\gamma-1}{\cos \theta_i} M_i M_c \cos(\theta_i - \theta'_i) \quad (4-3-69)$$

en posant $M_c = \frac{\bar{U}_c}{a_c} \quad M_i = \frac{\bar{U}_i}{a_i} \quad M = \frac{\bar{U}}{a} \quad \delta = \frac{M_c}{M} = \frac{\bar{U}_c}{\bar{U}_i}$

Remarque

Pour établir les relations du choc pour l'écoulement principal, on utilise les composantes (U_i, V_i) et (U, V) des vitesses W_i et W dans les axes $(\bar{x}, \bar{y})$ normal et parallèle au choc non perturbé.

Lorsque l'écoulement est faiblement perturbé, le choc subit une faible déformation et les axes $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ normal et parallèle au choc déformé forment avec les axes $(\bar{x}, \bar{y})$ un angle faible $\sigma(\bar{y}) = (\delta \frac{\bar{\xi}}{\bar{x}})' \frac{1}{\bar{y}}$ ($\bar{\xi}$ = déformation du choc).

Les relations du choc pour l'écoulement perturbé sont maintenant écrites dans les nouveaux axes $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ qui tiennent compte de la déformation du choc.

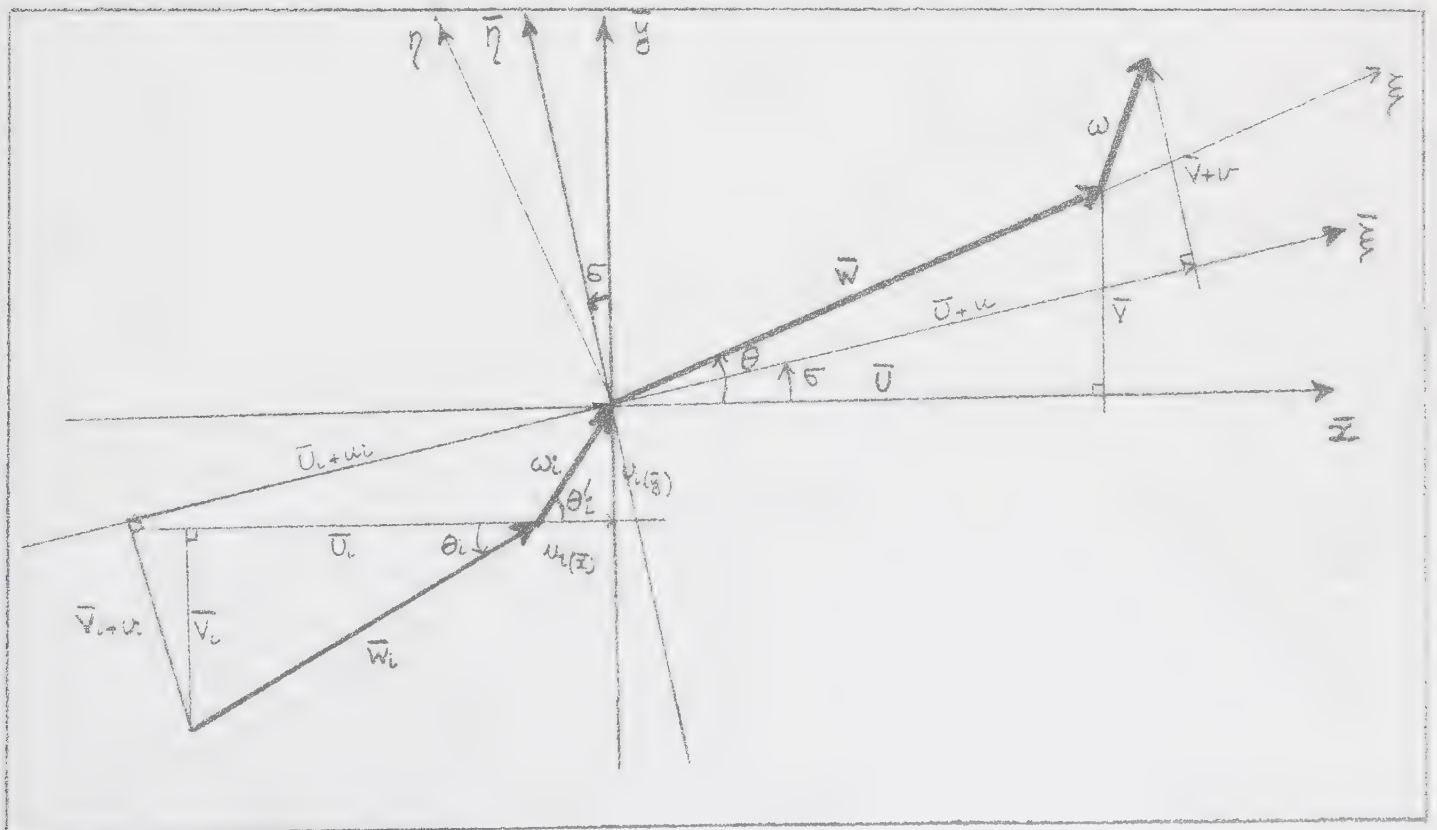
Les valeurs (u_i, v_i) et (u, v) des vitesses de perturbations ajoutées aux composantes des vitesses principales (U_i, V_i) et (U, V) ne sont pas les composantes des vitesses de perturbation ω_i et ω , ni dans les axes $(\bar{x}, \bar{y})$ ni dans les axes $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$.

Appelons $(U_i(\bar{x}), v_i(\bar{y}))$ et $(U(\bar{x}), v(\bar{y}))$ les composantes de ω_i et ω dans les axes (x, y) ; on obtient alors par changement d'axe de rotation faible σ (voir Fig.)

$$\begin{cases} \bar{U}_i(\bar{\xi}) + u_{i(\bar{\xi})} = \bar{U}_i + u_{i(\bar{x})} + (\bar{V}_i + v_{i(\bar{y})})\sigma = \bar{U}_i + u_i \\ \bar{V}_i(\bar{\eta}) + v_{i(\bar{\eta})} = -(\bar{U}_i + u_{i(\bar{x})})\sigma + \bar{V}_i + v_{i(\bar{y})} = \bar{V}_i + v_i \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} \bar{U}_i + u_i = \bar{U}_i + u_{i(\bar{x})} + \bar{V}_i \sigma \\ \bar{V}_i + v_i = \bar{V}_i + v_{i(\bar{y})} - \bar{U}_i \sigma \end{cases}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = u_{i(\bar{x})} + \bar{V}_i \sigma \\ v_i = v_{i(\bar{y})} - \bar{U}_i \sigma \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u_{(\bar{x})} + \bar{V} \sigma \\ v = v_{(\bar{y})} - \bar{U} \sigma \end{array} \right. \quad \text{avec } \bar{V} = \bar{V}_i$$

La condition de l'égalité des composantes parallèles au choc de vitesse s'écrit :

$$\bar{V}_i + v_i = \bar{V} + v$$

donc

$$v = v_i = v_{i(\bar{y})} - \bar{U}_i \sigma$$

c'est à dire la relation (4-14e)

$$\frac{v}{U_c} = \frac{\omega_i \sin \theta_i}{U_c} - (\delta \bar{x})'_{\bar{y}} \frac{M_c}{M_c}$$

4. Calcul des coefficients A et B

a) Considérons la relation (10) (4-3-52 c)

$$\bar{U} u_i + \bar{U}_i u = 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} [\bar{U}_i u_i + C_p T_i]$$

$$\bar{U}_i^2 \frac{\bar{U} u_i}{\bar{U}_i \bar{U}_i} + \bar{U}_i^2 \frac{u}{\bar{U}_i} = 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} [\bar{U}_i u_i + C_p T_i]$$

avec (14) $T_i = \frac{1}{C_p} \frac{P_i}{\rho_i} a_i^2$

$$\bar{U}_i^2 \frac{u}{\bar{U}_i} = \left[2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} - \frac{\bar{U}}{\bar{U}_i} \right] \bar{U}_i^2 \frac{u_i}{\bar{U}_i} + 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{P_i}{\rho_i} a_i^2$$

comme $\frac{\rho_i}{P_i} = \frac{1}{\gamma} \frac{P_i}{P_i}$

$$\bar{U}_i^2 \frac{u}{\bar{U}_i} = \bar{U}_i^2 \left[2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} - \frac{\bar{U}}{\bar{U}_i} \right] \frac{u_i}{\bar{U}_i} + 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} a_i^2 \frac{P_i}{P_i}$$

d'après (4-3-55)

$$M_i^2 \frac{u}{\bar{U}_i} = M_i^2 \left[2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} - \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_i^2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right) \right] \frac{u_i}{\bar{U}_i} + \frac{2(\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{P_i}{P_i}$$

donc $\frac{u}{\bar{U}_i} = A'_1 \frac{u_i}{\bar{U}_i} + B'_1 \frac{P_i}{P_i}$ (4-3-64)

avec $\begin{cases} A'_1 = -\frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_i^2} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right) \\ B'_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{2}{\gamma M_i^2} \end{cases}$ (4-3-65)

(4-3-66)

b) Considérons la relation (4-3-57)

$$\rho_i \bar{u}_i + \bar{\rho}_i u_i = \bar{\rho} \bar{u} + \bar{\rho} u$$

$$\bar{u}_i \bar{\rho}_i \frac{\rho_i}{\bar{\rho}_i} + \bar{u}_i \bar{\rho}_i \frac{u_i}{\bar{u}_i} = \bar{u} \bar{\rho} \frac{\rho}{\bar{\rho}} + \bar{u} \bar{\rho} \frac{u}{\bar{u}} \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}}$$

comme $\bar{\rho}_i \bar{u}_i = \bar{\rho} \bar{u}$

$$\frac{\rho_i}{\bar{\rho}_i} + \frac{u_i}{\bar{u}_i} ; \quad \frac{\rho}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}} \frac{u}{\bar{u}_i}$$

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{u_i}{\bar{u}_i} + \frac{1}{\delta} \frac{\rho_i}{\bar{\rho}_i} - \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}} \left(A'_1 \frac{u_i}{\bar{u}_i} + B'_1 \frac{\rho_i}{\bar{\rho}_i} \right)$$

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \left(1 - \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}} A'_1 \right) \frac{u_i}{\bar{u}_i} + \left(\frac{1}{\delta} - \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}} B'_1 \right) \frac{\rho_i}{\bar{\rho}_i}$$

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = A'_2 \frac{u_i}{\bar{u}_i} + B'_2 \frac{\rho_i}{\bar{\rho}_i}$$

$$A'_2 = \left(1 - \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}} A'_1 \right)$$

avec

$$B'_2 = \left(\frac{1}{\delta} - \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}} B'_1 \right)$$

D'après (4-3-55) et (4-3-65)

$$\begin{aligned}
 A'_2 &= 1 + \frac{\gamma+1}{2} M_L^2 \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_L^2} \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_L^2} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M_L^2 \right) \\
 &= \frac{1 - \frac{\gamma-1}{2} M_L^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_L^2} \quad (4-3-67) \\
 A'_2 &= \frac{2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_L^2}
 \end{aligned}$$

D'après (4-3-55) et (4-3-66)

$$\begin{aligned}
 B'_2 &= \frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma+1}{2} M_L^2 \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_L^2} \frac{2(\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{1}{M_L^2} \\
 B'_2 &= \frac{1}{\gamma} \left[1 - \frac{\gamma-1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_L^2} \right] \quad (4-3-68)
 \end{aligned}$$

c) Considérons la relation (4-3-53)

$$\begin{aligned}
 \overline{U_L^2} \frac{\overline{U_L'}}{\overline{U_L}} + C_p \frac{\overline{P_L}}{\overline{P_L}} \overline{P_L} &= \overline{U_L^2} \frac{\overline{U}}{\overline{U_L}} \frac{\overline{U}}{\overline{U_L}} + C_p \frac{\overline{P}}{\overline{P}} \overline{P} \\
 \overline{U_L^2} \frac{\overline{u_L}}{\overline{U_L}} + \frac{C_p}{R} \left(\frac{\overline{P_L}}{\overline{P_L}} - \frac{\overline{P_L}}{\overline{P_L}} \right) \frac{\overline{P_L}}{\overline{P_L}} &= \overline{U_L^2} \frac{\overline{U}}{\overline{U_L}} \frac{\overline{u}}{\overline{U_L}} + \frac{C_p}{R} \left(\frac{\overline{P}}{\overline{P}} - \frac{\overline{P}}{\overline{P}} \right) \frac{\overline{P_L}}{\overline{P_L}} \frac{\overline{P}}{\overline{P}} \frac{\overline{P_L}}{\overline{P_L}} \\
 \overline{U_L^2} \frac{\overline{u_L}}{\overline{U_L}} + \frac{C_p}{\gamma R} a_L^2 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\overline{P_L}}{\overline{P_L}} &= \overline{U_L^2} \frac{\overline{U}}{\overline{U_L}} \frac{\overline{u}}{\overline{U_L}} + \frac{C_p}{\gamma R} a_L^2 \left(\frac{\overline{P}}{\overline{P}} - \frac{\overline{P}}{\overline{P}} \right) \frac{\overline{P_L}}{\overline{P_L}} \frac{\overline{U}}{\overline{U_L}} \\
 \overline{U_L^2} \frac{\overline{u_L}}{\overline{U_L}} + \frac{a_L^2}{\gamma} \frac{\overline{P_L}}{\overline{P_L}} &= \frac{\overline{U}}{\overline{U_L}} \left(\overline{U_L^2} \frac{\overline{u}}{\overline{U_L}} + \frac{a_L^2}{\gamma} \frac{\overline{P}}{\overline{P}} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\overline{P_L}}{\overline{P_L}} - \frac{a_L^2}{\gamma-1} \frac{\overline{P}}{\overline{P_L}} \frac{\overline{P}}{\overline{P}} \right) \\
 \gamma M_L^2 \frac{\overline{u_L}}{\overline{U_L}} - \frac{\overline{P_L}}{\overline{P_L}} &= \frac{\overline{U}}{\overline{U_L}} \left(\gamma M_L^2 \frac{\overline{u}}{\overline{U_L}} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\overline{P}}{\overline{P_L}} \frac{\overline{P}}{\overline{P}} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\overline{P}}{\overline{P_L}} \frac{\overline{P}}{\overline{P}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{U}_i}{U} \gamma M_i^2 \frac{u_i}{U_i} + \frac{P_i}{P_i} = \gamma M_i^2 \left[A'_1 \frac{u_i}{U_i} + B'_1 \frac{P_i}{P_i} \right] + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\bar{P}}{P_i} \frac{P}{P} \\ - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\bar{P}}{P_i} \left[A'_2 \frac{u_i}{U_i} + B'_2 \frac{P_i}{P_i} \right]$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\bar{P}}{P_i} \frac{P}{P} = \left[\gamma M_i^2 \left(\frac{\bar{U}_i}{U} - A'_1 \right) + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\bar{P}}{P_i} A'_2 \right] \frac{u_i}{U_i} + \left[\frac{U_i}{U} - \gamma M_i^2 B'_1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\bar{P}}{P_i} B'_2 \right] \frac{P_i}{P_i}$$

$$\frac{P}{P} = A'_3 \frac{u_i}{U_i} + B'_3 \frac{P_i}{P_i} \quad (4-3-69)$$

$$\left\{ \begin{aligned} A'_3 &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\bar{P}}{P} \gamma M_i^2 \left(\frac{\bar{U}_i}{U} - A'_1 \right) \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\bar{P}}{P_i} A'_2 = (\gamma-1) \frac{\bar{P}}{P} M_i^2 \left(\frac{\bar{U}_i}{U} - A'_1 \right) + A'^2 \\ B'_3 &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\bar{P}}{P} \frac{\bar{U}_i}{U} - \gamma M_i^2 B'_1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\bar{P}}{P_i} B'_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\bar{P}}{P} \frac{\bar{U}_i}{U} - (\gamma-1) \frac{\bar{P}}{P} M_i^2 B'_1 + B'_2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\bar{P}}{P_i} A'_3 &= (\gamma-1) M_i^2 \frac{\bar{U}_i}{U} - A'_1 + \frac{\bar{P}}{P_i} A'_2 \\ \frac{\bar{P}}{P_i} B'_3 &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\bar{U}_i}{U} - (\gamma-1) M_i^2 B'_1 + \frac{\bar{P}}{P_i} B'_2 \end{aligned} \right.$$

D'après (4-3-55) (4-3-65) (4-3-67)

$$\frac{\bar{P}}{P_i} A'_2 = \frac{2}{\gamma+1} \gamma M_i^2 - \frac{\gamma-1}{2} \cdot \frac{2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2}$$

$$\frac{\bar{U}_i}{U} - A_1 = \frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{M_i^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2} + \frac{1}{\frac{\gamma+1}{2} M_i^2} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right) \\ = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_i^2 + \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right)^2}{\frac{\gamma+1}{2} M_i^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right)} = \frac{1 + 1 + \gamma M_i^4}{\frac{\gamma+1}{2} M_i^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right)}$$

$$(\gamma-1) M_i^2 \left(\frac{\bar{U}_i}{U} - A'_1 \right) = 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1 + \gamma M_i^4}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{P}}{\bar{P}_i} A'_3 &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{(\gamma-1)(1 + \gamma M_i^4) + 2(\gamma M_i^2 - \frac{\gamma-1}{2})}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{\gamma M_i^2 [(\gamma-1) M_i^2 + 2]}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2} \\ &= \frac{4\gamma M_i^2}{\gamma+1} \end{aligned}$$

D'après (4-3-56)

$$A'_3 = \frac{4\gamma M_i^2}{\gamma+1} \cdot \frac{\gamma+1}{2} \cdot \frac{1}{\gamma M_i^2 + \frac{\gamma-1}{2}}$$

$$A'_3 = \frac{2\gamma M_i^2}{\gamma M_i^2 + \frac{\gamma-1}{2}}$$

(4-3-70)

D'après (4-3-55) (4-3-66) et (4-3-68)

$$\begin{aligned} \frac{\bar{P}}{\bar{P}_i} B'_3 &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\bar{U}_i}{U} - (\gamma-1) M_i^2 B'_1 + \frac{\bar{P}}{\bar{P}_i} B'_2 \\ &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\gamma+1}{2} M_i^2 \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2} - (\gamma-1) M_i^2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{2}{\gamma M_i^2} + \frac{2}{\gamma+1} \left[\gamma M_i^2 - \frac{\gamma-1}{2} \right] \left[1 - \frac{\gamma-1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2} \right] \\ &= \frac{2(\gamma-1)^2 M_i^4 - (\gamma^2 - 2\gamma - 3) M_i^2 - 2(\gamma-1)}{2(\gamma+1) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right)} \\ &= \frac{4 \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right] \left[M_i^2 + \frac{\gamma-1}{2} \right]}{2(\gamma+1) \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \right]} = \frac{2 \left(M_i^2 - \frac{\gamma-1}{2} \right)}{\gamma+1} \end{aligned}$$

D'après (4-3-56) $B'_3 = \frac{M_i^2 - \frac{\gamma-1}{2}}{\gamma M_i^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$

(4-3-71)

d) En résumé on obtient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u}{U_i} = A'_1 \frac{u_i}{U_i} + B'_1 \frac{p}{p_i} \\ \frac{p}{p_i} = A'_2 \frac{u_i}{U_i} + B'_2 \frac{p}{p_i} \\ \frac{p}{p_i} = A'_3 \frac{u_i}{U_i} + B'_3 \frac{p}{p_i} \end{array} \right.$$

On peut rapporter les vitesses à la vitesse du choc $\bar{U}_c$ plutôt qu'à la vitesse incidente $\bar{U}_i$. Posons

$$\frac{\bar{U}_c}{\bar{U}_i} = \frac{M_c}{M_i} = \delta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u}{U_c} = A_1 \frac{u_i}{U_c} + B_1 \frac{p}{p_i} \\ \frac{p}{p_i} = A_2 \frac{u_i}{U_c} + B_2 \frac{p}{p_i} \\ \frac{p}{p_i} = A_3 \frac{u_i}{U_c} + B_3 \frac{p}{p_i} \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = -\frac{2}{\delta+1} \frac{1}{M_i^2} \left(1 - \frac{\delta-1}{2} M_i^2\right) \\ A_2 = \frac{2 \frac{M_c}{M_i}}{1 + \frac{\delta-1}{2} M_i^2} \\ A_3 = \frac{2 \delta M_c}{\delta M_i^2 - \frac{\delta-1}{2}} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} B_1 = \frac{\delta-1}{\delta+1} \frac{2}{\delta} \frac{1}{M_i M_c} \\ B_2 = \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{\delta-1}{1 + \frac{\delta-1}{2} M_i^2}\right) \\ B_3 = \frac{M_i^2 - \frac{\delta-1}{2}}{\delta M_i^2 - \frac{\delta-1}{2}} \end{array} \right.$$

e) Tube à choc

La vitesse de l'écoulement est perpendiculaire à l'onde de choc.

Soient :

U_{in} la vitesse de l'écoulement qui suit l'onde de choc

U_c la vitesse du choc réfléchi

$$U_i = U_{in} + U_c$$

On peut exprimer tous les coefficients A et B en fonction du rapport des pressions ξ (avant réflexion du choc)

$$\bar{U}_{in} = \frac{5(1-\xi)}{\sqrt{7\xi(6+\xi)}} a_0$$

$$\bar{U}_c = \frac{2+5\xi}{\sqrt{7\xi(6+\xi)}} a_0$$

$$\bar{U}_i = \sqrt{\frac{7}{6+\xi}} a_0$$

a_0 = célérité du son dans le milieu initial à basse pression au repos

$$a_0 = a_i \sqrt{\frac{\xi(6+\xi)}{1+6\xi}}$$

Soit :

$$\bar{U}_c = \frac{2+5\xi}{\sqrt{7(1+6\xi)}} a_i$$

$$\bar{U}_i = \sqrt{\frac{7}{1+6\xi}} a_i$$

$$\delta = \frac{\bar{U}_c}{\bar{U}_i} = \frac{2+5\xi}{7}$$

On obtient ainsi pour les coefficients :

$$A_1 = -\frac{2}{\delta+1} \frac{1}{M_\infty^2} \left(1 - \frac{\delta-1}{2} M_\infty^2\right) = -\frac{5}{6} \cdot \frac{1+6\xi}{7} \cdot \left[1 - \frac{1}{5} \frac{7}{1+6\xi}\right]$$

$$A_1 = \frac{1}{21} (1 - 15\xi)$$

$$A_2 = \frac{2\delta}{1 + \frac{\delta-1}{2} M_\infty^2} = \frac{2}{7} \frac{2+5\xi}{1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{1+6\xi}} = \frac{10(2+5\xi)(1+6\xi)}{7(12+30\xi)}$$

$$A_2 = \frac{5}{21} (1+6\xi)$$

$$A_3 = \frac{2\delta M_\infty^2 \delta}{\delta M_\infty^2 - \frac{\delta-1}{2}} = \frac{\frac{15}{4} \frac{7}{1+6\xi} \frac{2+5\xi}{7}}{\frac{7}{5} \frac{7}{1+6\xi} - \frac{1}{5}} = \frac{14(2+5\xi)}{48+6\xi}$$

$$A_3 = \frac{7}{3} \left(\frac{2+5\xi}{8-\xi} \right)$$

$$B_1 = 2 \frac{\delta-1}{\delta+1} \frac{1}{\delta M_\infty^2} \frac{1}{\delta} = \frac{20 \times 4}{14 \times 24} \cdot \frac{1+6\xi}{7} \cdot \frac{7}{2+5\xi}$$

$$B_1 = \frac{5}{21} \frac{1+6\xi}{2+5\xi}$$

$$B_2 = \frac{1}{\delta} \left[1 - \frac{\delta-1}{1 + \frac{\delta-1}{2} M_\infty^2} \right] = \frac{5}{7} \left[1 - \frac{\frac{2}{5}}{1 + \frac{1}{5} \frac{7}{1+6\xi}} \right] = \frac{5}{7} \left[1 - \frac{2}{5 + \frac{7}{1+6\xi}} \right]$$

$$B_2 = \frac{5}{21} \left(\frac{5+9\xi}{2+5\xi} \right)$$

$$B_3 = \frac{M_\infty^2 - \frac{\delta-1}{2}}{\delta M_\infty^2 - \frac{\delta-1}{2}} = \frac{\frac{7}{1+6\xi} - \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} \frac{7}{1+6\xi} - \frac{1}{5}}$$

$$B_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{17-3\xi}{8-\xi} \right)$$

4.3.8. Cas d'une onde de cisaillement

On définit une onde plane sinusoidale permanente sous la forme :

$$\vec{\omega}_i = \omega_i e^{j k_i \hat{r}_i} \quad (4-3-72)$$

avec $\omega_i = \omega_{i1} + j \omega_{i2}$ amplitude complexe

et $\frac{\omega_i}{\bar{\omega}_i} \ll 1$

Deux cas peuvent être envisagés celui de l'onde longitudinale et celui de l'onde transversale.

Si $\vec{\omega}_i$ est une onde longitudinale

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\vec{k}}, \vec{\omega}_i &= 0 + 2n\pi \\ \text{rot}(\vec{\omega}_i) &= j \vec{k} \wedge \vec{\omega}_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-3-73)$$

l'onde est irrotationnelle isentropique compressible.

Si $\vec{\omega}_i$ est une onde transversale

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\vec{k}}, \vec{\omega}_i &= \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi \\ \text{div}(\vec{\omega}_i) &= j \vec{k} \cdot \vec{\omega}_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-3-74)$$

l'écoulement étant permanent on a donc $\frac{p_i}{\bar{p}_i} = 0$

l'onde est rotationnelle et incompressible.

Dans ce cas $\theta'_i = \theta_i = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$

Les équations (4.14) a (4.19) s'écrivent alors puisque

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = A_5 = 0.$$

$$\begin{array}{ll}
 \frac{u}{U_c} = A_1 \cdot \frac{u_i}{U_c} & \text{a)} \\
 \frac{p}{p} = A_2 \cdot \frac{u_i}{U_i} & \text{b)} \\
 \frac{\rho}{\rho} = A_3 \cdot \frac{u_i}{U_c} & \text{c)} \\
 s = A_4 \cdot \frac{u_i}{U_c} & \text{d)} \\
 dH = \frac{U_i U_c}{\cos \theta_i} \cdot \frac{\omega_i}{U_c} & \text{e)} \\
 \frac{v}{U_c} = \frac{\omega_i}{U_c} \cdot \sin \theta_i - (\delta_{\bar{x}})'_y \frac{1}{\delta} & \text{f)}
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} a) \\ b) \\ c) \\ d) \\ e) \\ f) \end{array}} \right\} \quad (4-3-75)$$

Dans la suite, nous limitons l'étude au cas de l'onde de cisaillement permanente, que nous pouvons comparer avec les résultats expérimentaux.

5. Conclusion

Ainsi que nous l'avons dit dans l'introduction, l'étude du champ acoustique associé aux jets gazeux présente une telle complexité qu'il n'est pas encore possible de l'étudier dans son ensemble. On est pour l'instant réduit à des recherches fragmentaires, limitées à certains cas ; l'étude expérimentale seulement permet d'établir le lien et le complément nécessaires entre les différentes solutions obtenues pour des cas idéalisés.

Dans notre travail nous avons considéré la partie ayant fait l'objet d'un nombre peu important d'études dispersées, et où notre contribution pouvait s'avérer utile. C'est le cas des jets supercritiques structurés engendrant, outre le bruit du à la turbulence, une émission acoustique à fréquence discrète.

C'est A. Powell qui, le premier en 1953, a considéré ce phénomène comme étant la conséquence d'un processus d'autoentretien.

Cette théorie a été confirmée depuis par de nombreuses expériences et toute notre étude est basée sur ce mécanisme d'autoentretien qui peut être décrit succinctement comme suit :

on suppose que des ondes acoustiques se déplaçant vers l'amont parallèlement au jet sont susceptibles d'influencer la stabilité du jet au voisinage de l'orifice de sortie, donnant ainsi naissance à des perturbations embryonnaires. Ces perturbations périodiques (de même période que les ondes acoustiques qui les ont engendrées) sont transportées en aval à une certaine vitesse de propagation, et sont amplifiées pendant leur parcours ; à partir d'une certaine distance, elles possèdent une énergie capable de produire, lors du passage à travers les ondes de choc associées au système cellulaire, une énergie acoustique suffisante pour perpétuer le processus périodique. Ainsi donc, l'écoulement d'un jet peut être considéré comme un amplificateur de haut gain à bande large ; le rôle de l'amplificateur se traduit par le grossissement exponentiel avec la distance aval de petites perturbations créées en amont ; c'est la boucle du cycle d'autoentretien qui transforme le système en oscillateur à bande étroite, et qui détermine la valeur de la fréquence discrète.

Le mécanisme décrit par A. Powell est bien, comme cela a été prouvé, celui qui engendre le phénomène, mais l'analyse effective des éléments essentiels du mécanisme n'est pas abordée. Le but de notre étude est justement un essai pour découvrir des méthodes d'analyses susceptibles de faire progresser le problème dans chacune des parties du mécanisme.

Les principaux problèmes de base pour lesquels nous avons tenté de trouver des méthodes de résolution sont les suivantes :

- la création de petites perturbations initiales par l'interaction à l'orifice de sortie de la tuyère entre la couche limite libre et l'émission acoustique résultant

tante à fréquence discrète, se propageant dans le milieu extérieur ;

- la propagation des perturbations initiales créées à l'orifice de sortie en particulier la vitesse de propagation et le gain en amplitude de ces perturbations ;

- la génération d'ondes acoustiques par interaction entre les ondes de choc fixes de la structure du jet et les perturbations amplifiées se propageant vers l'aval.

— Le problème de la création de la perturbation initiale n'a été abordé que très récemment par des chercheurs étrangers et n'a pas encore été résolu théoriquement. Nous avons proposé une analyse simplifiée de ce problème basée essentiellement sur les variations des conditions de détente du jet. On sait que l'écoulement d'un jet est étroitement dépendant du rapport des pressions génératrices amont et aval ; si l'atmosphère de détente ambiante est soumise à de petites variations périodiques de pression, l'angle de détente et la vitesse du jet sont soumis à une variation de même période. Nous avons donc analysé l'effet de ces variations à l'orifice de sortie de la tuyère sur l'origine du jet de manière à pouvoir calculer la perturbation initiale de vitesse.

— Le problème de la propagation de la perturbation initiale se décompose en deux parties, suivant que l'on considère une perturbation de pression ou une perturbation de rotationnel.

a) Dans le cas de la propagation d'une perturbation de pression, le problème est idéalisé de la manière suivante : la couche limite libre du jet est réduite à une couche mince tourbillonnaire. Le problème est alors analysé en considérant les conditions d'instabilité de ce jet excité par une émission acoustique évoluant dans le milieu extérieur.

Pour étudier cette partie du mécanisme nous nous sommes principalement inspiré des travaux de J.W. Miles (1958) et C.K.W. Tam (1972) qui utilisent tous deux une méthode de transformation de Fourier-Laplace permettant de déterminer la vitesse de propagation de la perturbation de pression, son taux de grossissement, ainsi que la déformation de la couche mince tourbillonnaire.

La méthode de base de J.W. Miles ne résoud que le problème de l'instabilité temporelle, (la perturbation grossit exponentiellement dans le temps) ce qui n'est pas le cas de l'écoulement des jets, pour lesquels la perturbation et l'oscillation de la couche limite grossissent exponentiellement avec la distance aval.

L'étude de C.K.W. Tam se rapporte à un jet excité par des perturbations provenant de l'intérieur de la tuyère et engendrant une perturbation de pression et une oscillation du jet grossissant dans l'espace.

Dans notre analyse nous nous sommes proposés, guidés par ces deux études antérieures, de traiter le problème du jet excité à l'orifice de sortie par l'émission acoustique à fréquence discrète en provenance de l'aval. Nous avons, de plus, tenu compte des variations dans les conditions de détente, ce que négligeait l'étude de C.K.W. Tam en ne considérant qu'un jet idéalement détendu. Les calculs nous ont permis de constater qu'il était possible d'appliquer à notre problème la méthode de transformation de Fourier-Laplace et de pouvoir ainsi atteindre par le calcul les valeurs recherchées : vitesse de propagation et grossissement spatial d'une perturbation de pression engendrée dans le jet sous l'effet d'une émission extérieure.

b) Dans le cas d'une perturbation de rotationnel, le problème est idéalisé de la manière suivante : la couche limite libre du jet n'est plus considérée comme infiniment mince, et le profil des vitesses à l'intérieur de cette couche est choisi en tangente hyperbolique à la fois parce qu'il est le plus simple à étudier analytiquement, et parce qu'il se rapproche le plus du profil expérimental.

Il a été montré depuis longtemps que les couches limites libres pouvaient s'enrouler en tourbillons. Plus tard, Lord Rayleigh a montré qu'une couche limite libre possédant un profil de vitesse avec point d'inflexion est instable à certaines perturbations ; comme les profils de vitesse des couches limites libres ont toujours au moins un point d'inflexion, (comme c'est le cas pour le profil en th), il pourra toujours exister des perturbations amplifiées, et la couche limite s'enroulera.

Les études théoriques se rapportant à l'enroulement des couches limites libres sont peu nombreuses et seule l'analyse faite par A. Michalke (1968) permet d'étudier les propriétés des perturbations grossissant spatialement. Nous n'avons apporté à ce problème aucune contribution personnelle et nous n'avons fait que reprendre le calcul proposé qui permet d'obtenir par calcul numérique les valeurs recherchées de la vitesse de propagation et du taux de grossissement spatial exponentiel.

— Après l'étude de la création de la perturbation initiale, sa propagation vers l'aval et son grossissement exponentiel qui nous a conduits à spécifier les méthodes nous permettant d'atteindre ces deux grandeurs, nous nous sommes attachés à l'étude du phénomène suivant, qui survient lorsque ces perturbations amplifiées atteignent une onde de choc de la structure du jet. Nous avons donc analysé, d'une manière schématique, le problème de l'interaction d'une onde de choc avec les perturbations se propageant dans un écoulement isentropique compressible supposé uniforme. On sait que dans un tel milieu les perturbations possibles sont de trois types : perturbation de pression, de vitesse rotationnelle isentropique et d'entropie, et que, d'autre part, l'interaction de l'une de ces perturbations de base avec une onde de choc engendre simultanément la formation des trois perturbations de base.

Nous avons abordé le problème dans le cas de l'interaction d'un tourbillon isolé avec une onde de choc et cela pour deux raisons bien précises :

a) Cette interaction engendre une onde acoustique d'un niveau sonore important, et donc l'interaction d'une perturbation de rotationnel avec un choc semble bien être à la base de l'émission acoustique résultante.

b) Cette étude peut être abordée expérimentalement en utilisant un appareillage approprié (tube à choc) et des méthodes optiques de visualisation (cinématographie ultra-rapide).

Notre propre étude théorique se fonde sur les travaux complémentaires de H.S. Ribner et F.K. Moore, qui ont permis d'établir notre méthode de calcul, ces résultats théoriques appliqués au cas expérimental peuvent être comparés aux résultats visualisés. Le problème de l'interaction entre une onde de choc et un tourbillon a été traité par H.S. Ribner qui utilise un profil de vitesse simplifié discontinu ; nous avons apporté une amélioration en utilisant un profil de vitesse continu et théoriquement exact.

L'analyse consiste à décomposer la perturbation de vitesse rotationnelle (tourbillon) en ondes élémentaires sinusoïdales planes (éléments de la décomposition en série de Fourier de la perturbation considérée suivant toutes les directions et tous les nombres d'ondes). Chacune des ondes élémentaires interfère avec le choc et le problème est rendu permanent dans chacun des cas par un choix d'axes de références appropriés. Les équations de la dynamique exprimées dans ces axes permettent d'obtenir l'équation générale différentielle du mouvement perturbé, et les relations du choc oblique de l'écoulement perturbé conduisent à la détermination de toutes les grandeurs derrière le choc qui nous intéressent (en particulier les variations de pression et de masse spécifique) les grandeurs s'expriment en fonction d'une seule variable qui est :

- soit la vitesse de cisaillement incidente dans le cas d'une perturbation de vitesse rotationnelle ou d'entropie ;
- soit la pression incidente (ou vitesse longitudinale incidente correspondante) dans le cas d'une perturbation de pression.

Enfin, la résolution de l'équation différentielle générale de l'écoulement permet d'obtenir un système d'équations dont la résolution détermine la solution pour une onde incidente élémentaire. Les résultats obtenus pour chaque onde élémentaire sont intégrés et fournissent la recombinaison du champ derrière le choc, constitué des trois perturbations de base : le tourbillon transmis, une perturbation d'entropie et l'onde acoustique. La résolution numérique peut se faire dans le cas que nous avons étudié expérimentalement, la comparaison des résultats théoriques et expérimentaux permettant de juger la validité de la méthode.

En ce point de l'analyse une dernière partie reste à traiter. En effet, on

peut considérer que chaque perturbation traversant une onde de choc représente une source émettrice en mouvement. Lorsque la perturbation rencontre l'onde de choc suivante, elle devient une nouvelle source émettrice de force et de phase différente et ainsi de suite avec les autres ondes de choc de la structure périodique. Ces sources primaires doivent donner l'émission acoustique résultante finale à fréquence discrète ; ce sont les conditions d'autoentretien qui déterminent cette fréquence. Cette dernière partie de l'étude demande à être poursuivie. D'autre part, un important travail expérimental qui n'a pas été exposé dans cette étude a été mené parallèlement et nous nous proposons, si la possibilité nous en est donnée d'en comparer les résultats avec l'étude théorique une fois terminée.

- oOo -

UNIVERSITE DE PROVENCE

Place Victor-Hugo (3e)

Tél. 50 11 60

Marseille, le 24 JUIN 1974

LE SECRÉTAIRE GÉNÉRAL

MONSIEUR FRAGASSI J. P.

S/C DE MONSIEUR LE PROFESSEUR VALENSI

J'AI L'HONNEUR DE VOUS FAIRE SAVOIR QUE, PAR DÉCISION
EN DATE DU 21 JUIN 1974 MONSIEUR LE PRÉSIDENT VIENT D'ACCORDER
LE PERMIS D'IMPRIMER POUR VOTRE THÈSE DE DOCTORAT D'UNIVERSITÉ
PORTANT SUR LE SUJET SUIVANT :

«CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'EMISSION ACOUSTIQUE A FREQUENCE
DISCRETE DANS LES JETS GAZEUX STRUCTURES».

« VU ET PERMIS D'IMPRIMER

MARSEILLE, LE 21 JUIN 1974

LE PRÉSIDENT,

F. BOREL -»

- MICHEL COURTIN.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABRAMOVITCH G.V.
The theory of a free jet of a compressible gaz
N.A.C.A. Tech. Rept 1058 (1944)
- [2] BARNES N.P., BELLINGER S.L.
Examen de l'écoulement de l'air par des enregistrements des stries et des ombres.
Gen. Elec. Rev. (Trad C.R.S.I.M.) (1944)
- BARRAT M.J. voir [17] DAVIES P.O.A.L.
- [3] BASS J.
Cours de Mathématiques
Masson et Cie (1964)
- BELLINGER S.L. voir [2] BARNES N.F.
- BERMANN C.A. voir [27] FFOWCS-WILLIAMS J.E.
- [4] BETCHOV R., CRIMINALE O.N.
Stability of parallel flows
Appl. Math. and Mech. V 10 - Academic press (1967)
- [5] BLUMEN W.
Shear layer instability of an inviscid compressible fluid
Jour. of Fluid Mech. V 40-4 (1970)
- BOURNE H.H. voir [67] LUSH P.A.
- [6] BRADSHAW P.
Turbulence in the noise producing region of a circular jet.
N.P.L. Aero. Rept 1054 (1963)
- [7]
The effect of initial conditions on the development of a free shear layer
Jour. of Fluid Mech. V 26 (1966)
- [8]
Irrotationnal fluctuations near a turbulent boundary layer
Jour. of Fluid Mech. V 27 (1967)

- [9] BROWN S.N.
The compressible leading edge vortex
Jour. of Fluid Mech. V 22-1 (1965)
- [10] BSCHORR O.
Analyses of jet and boundary layer noise
I.C.A.S. pap. N° 68-43 (1968)
- CALLAGHAN E.E.
voir [41] HOWES W.L.
- [11] COMOLET R.
Etude expérimentale des fluides
Masson et Cie
- [12] CRAIK A. - SMITH F.I.P.
The stability of surface flows with viscosity stratification
Jour. of Fluid Mech. V 34-2 (1968)
- [13] CRAIK A.
Non linear resonant instability in boundary layers
Jour. of Fluid Mech. V 50 - 2 (1971)
- CRIMINALE O.N. Voir [4] BETCHOV R.
CROKER M.J. Voir [92] POTTER R.C.
CSANADY G.T. Voir [49] KRISHNAPPA
- [14] DAVIES M.G.
The production of acoustic tones by a choked jet
I.C.A. Stuttgart (1959)
- [15] Acoustic radiation of discrete frequency from a choked rectangular jet
Univ. of Liverpool Dept. of Acoustics (1960)
- [16] DAVIES M.E., OLDFIELD D.E.S.
Tones from a choked axisymmetric jet
Acoustica V. 12 (1962)
- [17] DAVIES P. O.A.L., FISCHER M.J., BARRAT M.J.
The characteristics of the turbulence in the mixing region of a round jet
Jour. of Fluid Mech. V. 15 (1963)
- [18] DOSANJH D.S., WEEKS T.M.
Sound generation by shock wave interaction with a vortex
A.I.A.A. Jour. V. 5 (1967)

- [19] EGGERS J.M.
Velocity profiles and eddy viscosity distribution downstream of a Mach 2,22 nozzle exhausting into quiescent air
N.A.S.A. Tech. Dept. D 3601 (1966)
- [20] ELDRED K.M.
Suppression of jet noise with emphasis on the near field
A.S.D. - T.R.D. 62-578 (1963)
- [21] EMDEN R.
Ann. der. Phys. und Chem. Leipzig (1899)
- [22] ESCH R.E.
Jour. of Fluid Mech. V. 3 (1957)
FISCHER M.J. Voir [17] DAVIES P.O.A.L.
Voir [67] LUSH P.A.
- [23] FFLOWCS-WILLIAMS J.E.
Some thoughts on the effect of aircraft motion and eddy convection of the noise from air jets.
Univ. of Southampton Aero-Astro Rept. N 155 (1960)
- [24] The noise of turbulence convected at high speed
Proc. Roy. Soc. A 255 (1963)
- [25] On the development of Mach waves radiated by small disturbances
Jour. of Fluid Mech. V 22 (1965)
- [26] FFLOWCS-WILLIAMS J.E., MAIDANIK G.
The Mach wave field radiated by supersonic turbulent shear flows
Jour of Fluid Mech. V. 21 - 4 (1965)
- [27] FFLOWCS-WILLIAMS J.E., BERMANN C.A.
Instability of a two dimensionnal compressible jet
Jour. of Fluid Mech. V 42-1 (1970)
FRAGASSI Voir [71] MERLE M.
- [28] FRANKLIN R.E.
Noise measurements on cold jets using convergent-divergent nozzles
Aero. Quart. V. 8 (1957)

- [29] FREYMUTH P.
On transition in a separated laminar boundary layer
Jour. of Fluid Mech. V 25 - 4 (1965)
- GILL M.S. Voir [81] NAGAMATSU H.T.
GLASSMAN I. Voir [90] PITKINS E.T.
- [30] GOTTLIEB P.
Sound sources near a velocity discontinuity
J.A.S.A. V 32 - 9 (1960)
- [31] GRAHAM E.N., GRAHAM B.B.
Effect of a shear layer on plane waves of sound in a fluid
J.A.S.A. V 46 (1969)
- [32] A note on theoretical acoustical sources in motion
Jour. of Fluid Mech. V 49 - 3 (1971)
- [33] HAMMIT A.G.
The oscillation and noise of an overpressure sonic jet
Jour. of the Aero. Sci. V 28-9 (1961)
- [34] HARTMANN J., LAZARUS F.
Jets d'air à vitesse supérieure à celle du son
Phil. Mag. (Trad C.R.S.I.M.)
- [35] HATANAKA H.
Jour. Soc. Sci. Cult. 2-3 (1949)
- [36] HOLLINGSWORTH M.A., RICHARDS E.J.
A schlieren study of the interaction between a vortex and a shock wave
in a shock tube
A.R.C. 17,955 F.M. 2323 (1955)
- [37] On the sound generated by the interaction of a vortex and a shock wave
A.R.C. 18, 257 F.M. 1371 (1956)
- HORVAY G. Voir [82] NAGAMATSU H.T.
- [38] HOWART L.
Modern development in Fluid Mechanics
Oxford, Clarendon Press (1953)

- [39] HOWE H.S.
Transmission of an acoustic pulse through a plane vortex sheet
Jour. of Fluid Mech. V 43-2 (1970)
- [40] Wave propagation in random media
Jour. of Fluid Mech. V 45-4 (1971)
- [41] HOWES W.L., CALLAGHAN E.E.
Near noise field of jet engine exhaust
N.A.S.A. Dept. 1338 (1957)
- [42] HOWES W.L.
Similarity of noise field of jets
N.A.S.A Tech. Dept R 52 (1960)
- HUBBARD H.H. Voir [52] LASSITER L.W.
- [43] JONES D.S., MORGAN J.D.
The instability of a vortex sheet in a subsonic stream under acoustic radiation
Proc. Camb. Phil. Soc. V 72 (1972)
- [44] JONES I.S.F.
Aerodynamic noise dependant on mean shear
Jour. of Fluid Mech. V 33-1 (1958)
- JONES J.H. Voir [93] POTTER R.C.
- [45] KELLER J.B.
Reflection and transmission of sound by a moving medium
J.A.S.A. V 27-6 (1955)
- [46] KOLPIN M.A.
The flow in the mixing region of a jet
Jour. of Fluid Mech. V 18 (1963)
- [47] KOVASZNAY L.S.G.
Turbulence in supersonic flows
Jour. Aero. Sci. V 20 (1953)
- [48] Interaction of a shock-wave and turbulence
Heat transfer and Fluid Mech. Inst. (1955)

- [49] KRISHNAPPA G., CSANADY G.T.
An experimental investigation of the composition of jet noise
Jour. of Fluid Mech V 37-1 (1969)
- [50] LANDAU L.
C.R. Acad. Sci. URSS 44-131 (1944)
- [51] LAMB H.
Hydrodynamics
Dover Publications N.Y. (1945)
- [52] LASSITER L.W., HUBBARD H.H.
The near noise field of static jets and some model studies of
devices for noise reduction
N.A.C.A. Rept 1261 (1954)
- [53] LAUFER J.
Aerodynamic noise in supersonic wind tunnels
Jour. Aero. Sci. (1961)
- [54] LAURENCE J.E.
Intensity scale and spectra of turbulence in mixing region of free
subsonic jet
N.A.C.A. Rept. 1292 (1956)
- LAZARUS F. Voir [34] HARTMANN J.
- [55] LESSEN M.
Nat. Adv. Comm. Aero. Washington T.R. 979 (1950)
- [56] LIGHTHILL M.J.
On sound generated aerodynamically-I General Theory
Proc. Roy. Soc. A 211 (1952)
- [57] On the energy scattered from interaction of turbulence with sound or
Shock waves
Proc. Camb. Phil. Soc. 49-3 (1953)
- [58] On sound generated aerodynamically-II Turbulence as a source of sound
Proc. Roy. Soc. A 222 (1954)
- [59] Sound generated aerodynamically - The Bekerian lecture 1961
Proc. Roy. Soc. A 267 (1962)
- [60] Jet noise - Wright Brothers Lecture
A.I.A.A. Jour. V 1 - 7 (1963)

- [61] LIN C.C.
The theory of hydrodynamic stability
 Cambridge Univ. Press (1955)
- [62] LOVE E.S.
 Experimental and theoretical studies of axisymmetric free jets
 N.A.S.A. Tech. Rept. R 6 (1959)
- [63] LOWSON M.V.
 Shadowgraph visualization of noise of cold supersonic jets
 Wyle Res. Dept. W.R 67-3 (1967)
- [64] LOWSON M.V., OLLERHEAD J.B.
 Shadowgraph visualization of jet noise
 Wyle Res. staff
 J.A.S.A. V 41 - 6 (1967)
- [65] Visualization of noise from cold supersonic jets
 J.A.S.A. V 44 - 2 (1968)
- [66] LUSH P.A.
 Measurements of subsonic jet noise and comparison with theory
 Jour. of Fluid Mech. V 46 (1971)
- [67] LUSH P.A., FISHER M.J., BOURNE M.H.
 Jet noise
 Jour. of Sound and vibr. V 28 (1973)
- MAIDANIK G. Voir [26] FLOWCS-WILLIAMS J.E.
- [68] MERLE M.
 Etude expérimentale des écoulements gazeux
 Thèse 1954
- [69] Etude expérimentale des écoulements gazeux
 Publ. Sci. et Tech. du Ministère de l'air Note 740 (1963)
- [70] Emissions acoustiques associées aux jets d'air supersoniques
 Jour. de Mech. V 4 - 3 (1965)
- [71] MERLE M., FRAGASSI J.P.
 High speed flash photography of jets and study of noises of aerodynamic origin
 Jour. of S.M.P.T.E. V 80 - 4 (1971)

- [72] MICHALKE A.
On the inviscid stability of the hyperbolic tangent profile
Jour. of Fluid Mech. V 19 (1964)
- [73] On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer
Jour. of Fluid Mech. V 23-3 (1965)
- [74] Vortex formation in a free boundary layer according to stability theory
Jour. of Fluid Mech V 22-2 (1965)
- [75] MILES J.W
On the reflection of sound at an interface of relative motion
J.A.S.A. V 29-2 (1957)
- [76] On the disturbed motion of a plane vortex sheet
Jour. of Fluid Mech V 5-4 (1958)
- [77] MOLLO-CHRISTENSEN E.
Measurement of near field pressure of subsonic jets
AGARD Rept. 449 (1963)
- [78] MORFEY C.L.
How to reduce the noise of jet engines
Engineering 198 (1964)
- [79] The sound field of sources in motion
Jour. of Sound and Vibr. V 23 (1972)
- MORGAN J.D. Voir JONES D.S. [42]
- [80] MOORE F.K.
Unsteady oblique interaction of a shock wave with a plane disturbance
N.A.C.A. Rept 1165 (1954)
- [81] NAGAMATSU H.T., SHEER R.E., GILL M.S.
Flow and acoustic characteristics of subsonic and supersonic jets from
convergent nozzle.
N.A.S.A. , C.R. W 1784 (1969)
- [82] NAGAMATSU H.T. , HORVAY G.
Supersonic jet noise
A.I.A.A. 8e Aero.Sci.Meet. (1970)
- OLDFIELD D.E.S. Voir [16] [17] DAVIES M.G.

- [83] OLLERHEAD J.B.
On the prediction of the near field noise of supersonic jets
N.A.S.A. - C.R. 857 (1967)
- OLLERHEAD J.B. Voir [64] [65] LOWSON M.V.
- [84] OUDART A.
L'étude des jets et la mécanique théorique des fluides
Publ. Sci. et Tech. du Min. de l'Air N° 234 (1949)
- [85] PACK D.C.
Sur la formation d'ondes de choc dans les jets gazeux supersoniques
Trad. C.R.S.I.M. (1947)
- [86] PAI S.I.
Jour. Aero. Sci. 18, 731 (1951)
- [87] Jour. Aero. Sci. 21, 235 (1954)
- [88] Fluid Dynamics of jets
Van Nostrand N.Y. (1954)
- [89] PHILLIPS G.M.
On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers
Jour. of Fluid Mech. V 9-1 (1960)
- [90] PITKINS E.T., GLASSMAN I.
Experimental mixing profiles of a Mach 2,6 free jet.
Jour. Aero.Sci. (1958)
- [91] POLDERVAART L.J.
On the production of discrete frequencies in the noise spectrum of
a supersonic jet
Eindhoven Univ. of Tech. (1968)
- [92] POTTER R.C., CROCKER M.J.
Acoustic prediction methods for rocket engines including the effect of
clustered engines and deflection of exhaust flow
N.A.S.A., C.R. (1966)
- [93] POTTER R.C., JONES J.H.
An experiment to locate the acoustic sources in a high speed jet
exhaust stream
Wyle labo. Rept. (1967)

- [94] POWELL A.
On the mechanism and reduction of choked jet noise
A.R.C. 15 C 623 F.M. 1858 (1952)
- [95] The noise of choked jets
J.A.S.A. V.25 ((1953)
- [96] On the noise emanating from a two dimensionnal jet above critical pressure
Aero. Quart. V. 4 (1953)
- [97] The influence of the exit velocity profile on the noise of a jet
Aero. Quart V. 4 (1954)
- [98] Mechanism of aerodynamic sound production
A.G.A.R.D. Rept. 466 (1963)
- [99] PRANDTL L.
Guide à travers la Mécanique des Fluides
- [100] RAYLEIGH J.W.S.
The theory of sound
Dover Publications N.Y. (1945)
- [101] RIBNER H.S.
Reflection transmission and amplification of sound by a moving medium
J.A.S.A. V. 49-4 (1954)
- [102] Convection of a pattern of vorticity through a shock-wave
N.A.C.A. Rept. 1165 (1954)
- [103] Shock turbulence interaction and the generation of noise
N.A.C.A. Rept. 1233 (1955)
- [104] New theory of jet noise generation, directivity and spectra
J.A.S.A. N° 31 (1959)
- [105] The sound generated by interaction of a single vortex with a shock wave
U.T.I.A.S. Rept. N° 61 (1959)
- [106] Aerodynamic sound from fluid dilatations
A theory of the sound from jets and other flows
U.T.I.A.S. Rept. N° 86 (1962)

- [107] The generation of sound by turbulent jets
Advances in applied Mech. V 8 - Academic Press N.Y. (1964)
- [108] Quadrupole correlations governing the pattern of jet noise
Jour. of Fluid Mech. V 38-1 (1969)
- [109] Eddy Mach wave noise from a simplified model of a supersonic mixing layer
U.T.I.A.S. Rept. n° 146 (1969)
RICHARDS E.J. Voir [36] HOLLINGSWORTH M.A.
- [110] SATO H.
Jour. of Fluid Mech V 7 (1960)
- [111] SAUER R.
Theoretical Gaz Dynamics
Edwards Ann Arbor (1947)
- [112] SCHARDIN H.
La méthode des stries de Toepler
Forschungsheft (Trad CRSIM) (1934)
SHEER R.E. Voir [81] NAGAMATSU H.T.
SMITH F.I.P. Voir [12] CRAIK A.
- [113] STEWART R.W.
Irrotational motion associated with free turbulent flows
Jour. of Fluid Mech. V. 1 (1956)
- [114] STUART J.T.
On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers
Jour. of Fluid Mech. V. 29-3 (1967)
- [115] TAM C.K.W.
Directional acoustic radiation from a supersonic jet generated by a shear layer instability
Jour. of Fluid Mech V.46-4 (1971)
- [116] On the noise of a nearly ideally expanded supersonic jet
Jour. of Fluid Mech V.51-1 (1972)
- [117] TATSUMI T., KAKUTAMI T.
Jour. of Fluid Mech V-4 (1958)

- [118] VALENSI J.
Cours de Mécanique des Fluides
Institut de Mécanique des Fluides de Marseille
- [119] WANG D.P.
Finite amplitude effect on the stability of a jet of circular cross section
Jour. of Fluid Mech. V 34-2 (1968)
- [120] WARREN W.R.
An analytical and experimental study of compressible fluid jets
Publ. N° 23-885 Univ. of Microfilms Inc. (1957)
- WEEKS T.M. Voir [18] DOSANJH D.S.
- [121] WESTLEY R., WOOLEY J.H.
An investigation of the near noise fields of a choked axysymmetric air-jet
Wat. Res. Counc. of Canada A.R. LR 506 (1968)
- [122] Shock-cell noise mechanisms : The near field sound pressure associated
with a spinning screech mode
Conference : Courant development in sonic fatigue, Southampton (1970)
- [123] YEH C.
Reflection and transmission of sound waves by a moving shear layer
J.A.S.A. 41-4 (1966)

